Universidad Autónoma de Baja California
Facultad de Ciencias

Título

Normalización de las raíces de las funciones Bessel de primer y segundo tipo

Tesis que para cubrir parcialmente los requisitos para obtener el grado de MAESTRO EN CIENCIAS presenta:

Nombre

Jesus Antonio Sauceda Cazares

Dra. Selene Solorza Calderón
Director
Facultad de Ciencias,
UABC

Ensenada, Baja California, México, Enero de 2023

TESIS DEFENDIDA POR

Jesus Antonio Sauceda Cazares

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ

SELENE SOLORZA

Dra. Selene Solorza Calderón

Director del Comité

Carlos Yee R.

Dr. Carlos Yee Romero

Miembro del Comité

Everardo Gutiérrez López

Dr. Everardo Gutiérrez López

Miembro del Comité

Enero de 2023

Índice

Índice de Figuras

Índice de Tablas

Resumen

RESUMEN de la Tesis que presenta **Jesus Antonio Sauceda Cazares** como requisito parcial para la obtención del grado de **MAESTRO EN CIENCIAS E INGENIERÍA**. Ensenada, Baja California, México. Enero 2023.

TÍTULO

Normalización de las raíces de las funciones Bessel de primer y segundo tipo

Aprobado por: SELENE SOLORZA

Dra. Selene Solorza Calderón
Director de Tesis

Este trabajo de tesis presenta una metodología para encontrar la solución analítica para el cálculo de las raíces normalizadas de las funciones Bessel de primer y segundo tipo de orden n. Esta solución se presenta como una serie infinita de potencias de los argumentos de las funciones Bessel de primer y segundo tipo de orden n. También, se presenta una metodología para encontrar la solución analítica para las raíces normalizadas del producto cruzado de funciones Bessel de primer y segundo tipo de orden n. En este trabajo de tesis se utilizan las raíces de las funciones Bessel para calcular las soluciones a las ecuaciones de frecuencia que se presentan en el estudio de los modos torsionales de vibración de cilindros y anillos cilíndricos poroelásticos, infinitos, con simetría axial, en ausencia de fluidos (secos) y enmarcados en la teoría de Biot de viscosidad añadida y con ello calcular las velocidades de fase de cada modo torsional de vibración que se presentan en el cilindro o el anillo cilíndrico sólido. Y, se determinan los rangos de frecuencias donde se presenta cada modo torsional de vibración en el medio. Además, se analizan experimentos computacionales en cilindros y anillos cilíndricos de arenisca variando el radio, la densidad de la matriz sólida, la porosidad y el módulo de cizallamiento.

Palabras clave: Funciones Bessel, raíces de las funciones Bessel, cilindros, anillos cilíndricos, teoría de Biot de viscosidad añadida.

Abstract

ABSTRACT of the Thesis, presented by **Jesus Antonio Sauceda Cazares**, in order to obtain the **MASTER DEGREE** in **SCIENCES AND ENGINEERING**. Ensenada, Baja California, México. January, 2023.

TÍTULO
Normalización de las raíces de las funciones Bessel de primer y segundo tipo

Approved by: Selene Solorza
Dra. Selene Solorza Calderón
Thesis Advisor

This thesis presents a methodology to find the analytical solution to calculate the normalized roots of the Bessel functions of the first and second kind and order n. This solution is presented as an infinite power series of the arguments of the Bessel function of the first and second kind and order n. Also, is presented a methodology to find the analytical solution to calculate the normalized roots of the cross-products of the Bessel function of the first and second kind and order n. This work uses the roots of the Bessel functions to calculate the solutions to the frequency equations presented on the study of the torsional modes of vibration of infinite poroelastic cylinders and axial-symmetric infinite hollow poroelastic cylinders and free from fluid (dry case) in Biot viscosity-extended theory, and calculate the phase velocity of every torsional mode of vibration presented on the solid cylinder or hollow cylinder. Moreover, is determined the frequency range where each torsional mode of vibration is presented in the studied environment. An analysis of the computational experiments on sandstone cylinders and hollow cylinders varying radius, solid density, porosity and solid frame shear modulus is also provided.

Keywords: Bessel functions, roots of the Bessel functions, cylinders, hollow cylinders, Biot viscosity-extended theory.

A mi madre,

Dora Esperanza

Agradecimientos

Primeramente quiero agradecer a la Dra. Selene Solorza Calderón por toda su dedicación, apoyo, tiempo y paciencia invertida tanto en este trabajo como en mi formación profesional. Gracias por todas esas palabras de aliento, consejos y lecciones con las que he aprendido en todo este tiempo.

A mis sinodales Dr. Carlos Yee Romero y Dr. Everardo Gutiérrez López, por sus comentarios, correcciones y sugerencias para mejorar y orientar adecuadamente este trabajo, así como al Dr. Jesús Ramón Lerma Aragón, coordinador del posgrado en la Facultad de Ciencias.

Este trabajo no habría sido posible sin el apoyo y el estímulo del Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología (CONACyT) por brindarme la beca No. CVU 1062226 para realizar mis estudios de maestría, así como a la Universidad Autonoma de Baja California (UABC) por el apoyo brindado mediante el proyecto interno con número 400/2739.

A mi hermano Erasmo, por tomarse el tiempo de ayudarme en todos mis proyectos y estar presente en cada paso del proceso y a mi familia, por creer en mi persona y alentarme a ser la mejor versión de mi.

A mis amigos Flor, Leo, Abraham, Fabiola y todas esas personas que estuvieron presentes para disfrutar y apoyarme en cada paso de esta etapa.

Capítulo 1

Introducción

Las funciones Bessel de primer y segundo tipo se presentan en problemas donde el espacio en el que se trabaja tiene forma de cilindro recto o, dicho de otra forma, está expresado en coordenadas cilíndricas [23]. Existen diferentes campos de la ciencia y la tecnología donde un cilindro o un anillo cilíndrico es el objeto geométrico idóneo para representar al dominio del modelo matemático con el que se describe el fenómeno de estudio. Por ejemplo, un nanotubo de carbono (CNT, por sus siglas en inglés) se puede describir geométricamente como un anillo cilíndrico, pues es una lámina de grafeno enrollada [17, 19]. Existen diferentes tipos de nanotubos de carbono, los conformados por una sola lámina o anillo cilíndrico (denotados por SWCNT, por sus siglas en inglés) y los anillos cilíndricos compuestos, conformados por varias láminas (MWCNT, por sus siglas en inglés) [17, 19]. Debido a las propiedades ópticas, mecánicas, eléctricas y de biocompatibilidad, los nanotubos de carbono se están empleando en el área de la biomedicina para el diagnóstico, tratamiento de enfermedades, terapias, ingeniería de tejidos y desarrollo de algunos hidrogeles [2, 5, 7, 10–13, 15, 16, 18, 27, 30–32]. Por otra parte, en materiales especializados para la construcción y la ingeniería se usan piezas con formas geométricas cilíndricas, como son las placas y armazones utilizados para construir tuberías, fuselajes espaciales y materiales que se emplean en la construcción de edificios [8, 26]. Dadas las diversas aplicaciones antes mencionadas es conveniente poder realizar primero simulaciones computacionales antes de llevar a la práctica la aplicación, de esta forma se optimizan recursos, tiempo y en algunos casos se evita poner en riesgo a personas. Ya que estos objetos pueden ser clasificados en la categoría de cilindros huecos o sólidos poroelásticos, la teoría de Biot es una herramienta muy útil para poder describir las propiedades de estos materiales de diferentes formas y tamaños [21, 22, 28]. En dicha teoría aparecen, en las ecuaciones de frecuencias, las funciones Bessel de primer tipo de orden n, denotada por $J_n(z)$ y las funciones Bessel de segundo tipo de orden n, denominadas $Y_n(z)$. Mediante las ecuaciones de frecuencia podemos describir los modos naturales de vibración de los cilíndros poroelásticos.

1.1. Justificación

En este proyecto de tesis se busca encontrar la manera de normalizar los argumentos de las funciones Bessel de primer tipo: $J_2(q_{\beta_{\mathrm{I}}} r_1)$, $J_2(q_{\beta_{\mathrm{I}}} r_2)$, $J_2(q_{\beta_{\mathrm{II}}} r_1)$, $J_2(q_{\beta_{\mathrm{II}}} r_2)$, y de las funciones Bessel de segundo tipo: $Y_2(q_{\beta_{\mathrm{I}}} r_1)$, $Y_2(q_{\beta_{\mathrm{I}}} r_2)$, $Y_2(q_{\beta_{\mathrm{II}}} r_1)$, $Y_2(q_{\beta_{\mathrm{II}}} r_2)$. Dichas funciones conforman las ecuaciones de frecuencias de los modos torsionales de vibración de anillos cilíndricos huecos poroelásticos, infinitos, con simetría axial, en ausencia de fluidos o completamente saturados por un fluido y enmarcados en la teoría de Biot de viscosidad añadida. Las raíces de esas funciones describen las formas de las ondas torsionales que se excitan en el anillo cilíndrico. Esas raíces presentan una solución a las ecuaciones de frecuencias, aunque existen métodos numéricos como la bisección, Newton-Raphson, secante, regla falsa, entre otros, para encontrar raíces de funciones continuas y acotadas en un intervalo fijo donde solo exista una raíz [4], en el caso particular de las funciones Bessel, estas tienen un número infinito de raíces, pues son funciones trascendentales que oscilan muy rápido alrededor del eje horizontal conteniendo más de una raíz en un intervalo pequeño, por ende el trabajo de encontrar raíces con los métodos tradicionales es una tarea computacionalmente difícil, por lo que se requieren algoritmos de búsqueda de raíces especializados para este tipo de funciones [9]. Además, aunque se tenga una representación en series de potencias que es convergente, el comportamiento aproximadamente periódico de las series hace que el cálculo de las raíces de las funciones Bessel sea impráctico, ya que la convergencia es lenta e inestable numéricamente [9].

Dado que en los últimos años, los modelos de propagación de ondas en medios porelásticos están teniendo un auge en aplicaciones de diversa índole, tanto científicas, tecnológicas, industriales, como en la salud, es preponderante comprender cómo obtener un sistema normalizado para calcular las raíces de las funciones Bessel de primer y segundo tipo para reducir al máximo las inestabilidades numéricas y a bajo costo de tiempo de cómputo. Ejemplo de dichas aplicaciones se pueden ver en el análisis de las propiedades de las rocas (geofísica) [25], en modelos médicos [17, 19], en el diseño automotriz (reducción de ruido) [8], en el diseño aeroespacial (resistencia de materiales) [26], entre otras.

1.2. Planteamiento del problema

En el marco de referencia de la teoría de Biot [22, 24], los modos torsionales de vibración de anillos cilíndricos huecos poroelásticos, infinitos, con simetría axial, completamente saturados por un fluido y enmarcados en la teoría de Biot de viscosidad añadida, surgen las ecuaciones de frecuencias

$$0 = J_2(q_{\beta_{\mathrm{I}}} r_1) Y_2(q_{\beta_{\mathrm{I}}} r_2) - J_2(q_{\beta_{\mathrm{I}}} r_2) Y_2(q_{\beta_{\mathrm{I}}} r_1), \quad (1.1)$$

$$0 = J_2(q_{\beta_{\mathrm{II}}} r_1) Y_2(q_{\beta_{\mathrm{II}}} r_2) - J_2(q_{\beta_{\mathrm{II}}} r_2) Y_2(q_{\beta_{\mathrm{II}}} r_1), \quad (1.2)$$

donde r_1 y r_2 son el radio interno y externo del anillo, J_2 es la función Bessel de primer tipo y de segundo orden, Y_2 es la función Bessel de segundo tipo y de segundo orden,

$$q_{\beta_{\mathrm{I}}}^2 = \frac{\omega^2}{\beta_{\mathrm{I}}^2} - k^2, \quad (1.3)$$

$$q_{\beta_{\mathrm{II}}}^2 = \frac{\omega^2}{\beta_{\mathrm{II}}^2} - k^2, \quad (1.4)$$

β_{I} y β_{II} son las velocidades del medio asociadas a las ondas S rápida y lenta, respectivamente, ω es la frecuencia, k es el número de onda axial.

Una de las soluciones para las ecuaciones (1.1) (1.2), son las raíces de las funciones $J_2(z)$ y $Y_2(z)$. Por lo regular, es muy complicado y poco práctico encontrar de forma analítica las raíces de dichas funciones, por lo que una manera de determinarlas es usar métodos numéricos.

Lo que se busca al emplear un método numérico para encontrar raíces de funciones es que sea estable para que el tiempo y la carga computacional empleados en el cálculo de las raíces sean razonables y nos proporcione una buena aproximación a la solución.

1.3. Preguntas de investigación

Basados en la problemática planteada en la presente propuesta de tesis

1. ¿Cuál es el método estándar para calcular las raíces de las funciones Bessel de primer tipo $J_n(z)$?

2. ¿Cuál es el método estándar para calcular las raíces de las funciones Bessel de segundo tipo $Y_n(z)$?

3. ¿Cómo podemos normalizar los argumentos de las funciones $J_2(q_{\beta_\mathrm{I}} r_1)$, $J_2(q_{\beta_\mathrm{I}} r_2)$, $Y_2(q_{\beta_\mathrm{I}} r_1)$, $Y_2(q_{\beta_\mathrm{I}} r_2)$, $J_2(q_{\beta_\mathrm{II}} r_1)$, $J_2(q_{\beta_\mathrm{II}} r_2)$, $Y_2(q_{\beta_\mathrm{II}} r_1)$, $Y_2(q_{\beta_\mathrm{II}} r_2)$ para que el cálculo numérico de las raíces de las funciones sea estable?

4. ¿Cómo podemos utilizar las raíces de $J_2(q_{\beta_\mathrm{I}} r_1)$, $J_2(q_{\beta_\mathrm{I}} r_2)$, $Y_2(q_{\beta_\mathrm{I}} r_1)$, $Y_2(q_{\beta_\mathrm{I}} r_2)$, $J_2(q_{\beta_\mathrm{II}} r_1)$, $J_2(q_{\beta_\mathrm{II}} r_2)$, $Y_2(q_{\beta_\mathrm{II}} r_1)$, $Y_2(q_{\beta_\mathrm{II}} r_2)$ para satisfacer las ecuaciones de frencuencia (1.1) y (1.2)?

1.4. Hipótesis

El normalizar los argumentos de las funciones $J_2(q_{\beta_\mathrm{I}} r_1)$, $J_2(q_{\beta_\mathrm{I}} r_2)$, $Y_2(q_{\beta_\mathrm{I}} r_1)$, $Y_2(q_{\beta_\mathrm{I}} r_2)$, $J_2(q_{\beta_\mathrm{II}} r_1)$, $J_2(q_{\beta_\mathrm{II}} r_2)$, $Y_2(q_{\beta_\mathrm{II}} r_1)$, $Y_2(q_{\beta_\mathrm{II}} r_2)$ hace que el cálculo numérico de las raíces de las funciones sea estable mediante un método estandarizado.

1.5. Objetivo general

Determinar la manera de normalizar los argumentos de las funciones Bessel de primer y de segundo tipo que aparecen en las dos ecuaciones de frecuencias para los modos torsionales de vibración de anillos cilíndricos huecos poroelásticos, infinitos, con simetría axial, completamente saturados por un fluido y enmarcados en la teoría de Biot de viscosidad añadida, para poder calcular numéricamente de manera estable la solución a dichas ecuaciones.

1.5.1. Objetivos específicos

1. Determinar la manera en que se calculan numéricamente las raíces de las funciones Bessel de primer tipo $J_n(z)$, con el menor error numérico y el menor tiempo de cómputo.

2. Determinar la manera en que se calculan numéricamente las raíces de las funciones Bessel de segundo tipo $Y_n(z)$, con el menor error numérico y el menor tiempo de cómputo.

3. Determinar la manera de normalizar los argumentos de las funciones Bessel de primer tipo: $J_2(q_{\beta_{\mathrm{I}}} r_1)$, $J_2(q_{\beta_{\mathrm{I}}} r_2)$, $J_2(q_{\beta_{\mathrm{II}}} r_1)$, $J_2(q_{\beta_{\mathrm{II}}} r_2)$.

4. Determinar la manera de normalizar los argumentos de las funciones Bessel de segundo tipo: $Y_2(q_{\beta_{\mathrm{I}}} r_1)$, $Y_2(q_{\beta_{\mathrm{I}}} r_2)$, $Y_2(q_{\beta_{\mathrm{II}}} r_1)$, $Y_2(q_{\beta_{\mathrm{II}}} r_2)$.

En el siguiente capítulo se introducirán las funciones Bessel de primer y segundo tipo, y sus respectivas representaciones mediante la función Γ, en la forma integral y en expansiones asintóticas.

Capítulo 2

Funciones Bessel

2.1. Introducción

En el estudio de cilindros y cilindros huecos, también conocidos como anillos cilíndricos, trabajar en coordenadas cilíndricas facilita la representación matemática del objeto [23], ya que las soluciones a la ecuación diferencial de Bessel forman una base canónica del sistema [3]. Al trabajar en coordenadas cilíndricas los puntos son representados por (r, θ, z), como se muestra en la Fig. 2.1, donde r representa el grosor del cilindro, θ el ángulo con respecto al eje horizontal y z la altura del cilindro.

La solución de la ecuación diferencial de Bessel

$$z^2 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + z \frac{\partial y}{\partial z} + (z^2 - \nu^2) y = 0, \tag{2.1}$$

está representada por la función Bessel de primer tipo $J_\nu(z)$, la función Bessel de segundo tipo $Y_\nu(z)$ (también conocida como la función de Weber), y las funciones Bessel de tercer tipo $H_\nu^{(1)}(z)$ y $H_\nu^{(2)}(z)$ (también conocidas como las funciones de Hankel), $\nu \in \mathbb{R}$ indica el orden de las funciones [1].

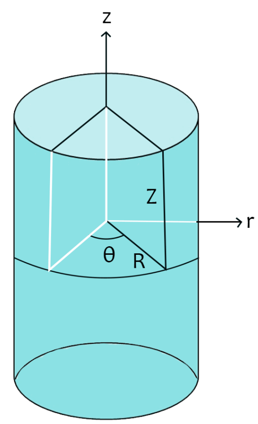

Figura 2.1: Ejemplo de la notación para expresar un punto del plano (x, y, z) en coordenadas cilíndricas (r, θ, z).

Este trabajo de tesis se enfocará únicamente al estudio de las funciones Bessel de primer y segundo tipo, pues éstas son las que aparecen en las ecuaciones de frecuencia (1.1) y (1.2).

2.2. Funciones Bessel de primer tipo

Existen diferentes maneras de describir a la función Bessel de primer tipo, en particular, en este trabajo de tesis se utilizarán las representaciones mediante la función Γ, la forma integral y de expansiones asintóticas.

2.2.1. Función Gamma

La función Gamma [1], definida como

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)...(z+n)}, \tag{2.2}$$

donde $z \in \mathbb{C} \backslash \{0, -1, -2, ...\}$, $n \in \mathbb{N}$ y ! es la función factorial. Esta representación se puede utilizar para expresar a la función Bessel de primer tipo y orden $\nu \in \mathbb{R}$ como una serie ascendente, esto es

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{z^2}{4})^k}{k!\Gamma(\nu + k + 1)}. \tag{2.3}$$

En la Fig. 2.2 se muestran las gráficas de la función Bessel de primer tipo $J_\nu(x)$ para $\nu = 0, 1, 2, 3,$ y argumento real, lo cual tradicionalmente se denota por x. Como se puede observar se alcanza la amplitud máxima y posteriormente decae rápidamente a cero, a partir de que se presenta la primera raíz de la función, la curva oscila rápidamente alrededor del eje x conforme se van presentando las infinitas raíces de $J_\nu(x)$, y en la Fig. 2.3 se observa que la función decrece rápidamente y tiende a cero.

2.2.2. Representación Integral

Al desarrollar la función Bessel de primer tipo en su forma integral, se tiene que, dependiendo si el argumento tiene un dominio $x > 0$ o $|argz| < \pi/2$, y si el orden de la función $\{\nu > -1/2 | \nu \in \mathbb{R}\}$ o $\{|\nu| < 1/2 | \nu \in \mathbb{R}\}$, existen diferentes formas integrales de representar dicha función [1]. Dado que este trabajo de tesis se enfocará a aplicaciones geofísicas, entonces se utilizan argumentos en el dominio $x > 0$ [20–22, 28], y se tiene que

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^\pi cos(zcos(t))sin(t)^{2\nu} dt. \tag{2.4}$$

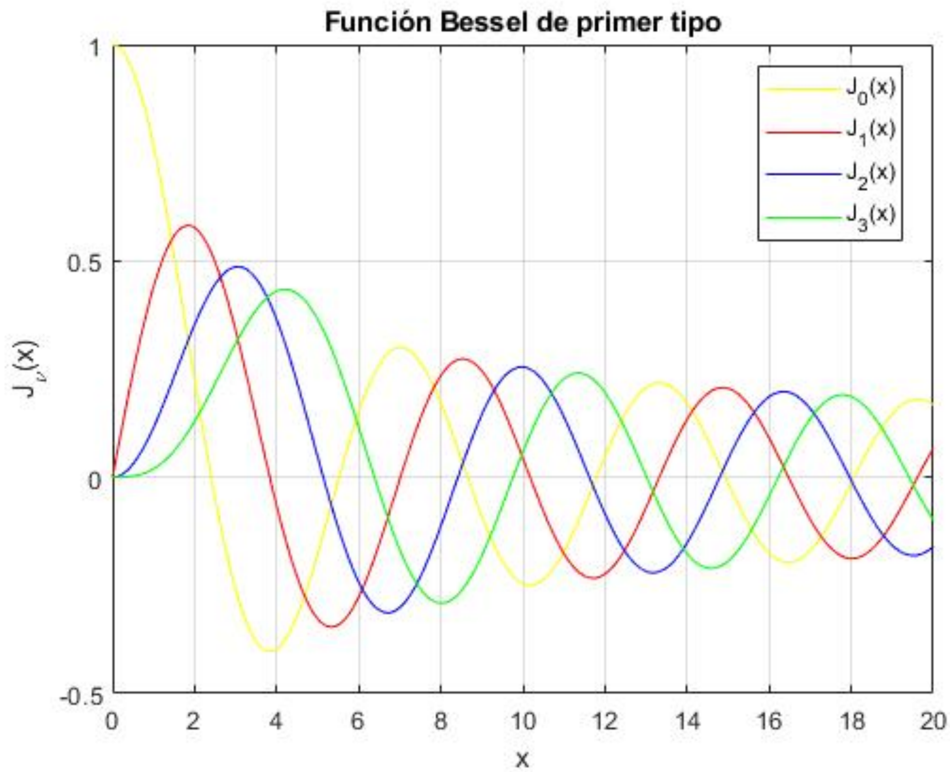

Figura 2.2: Ejemplo de la gráfica de la función Bessel de primer tipo para argumentos reales $x \in [0, 20]$ y órdenes enteros $0, 1, 2$ y 3.

2.2.3. Expansión Asintótica

La función $J_\nu(z)$ también puede desarrollarse utilizando series asintóticas para $|z| \to \infty$ [1], mediante

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi\, z}}\{P(\nu, z)cosX - Q(\nu, z)sinX\}, \tag{2.5}$$

donde $X = z - (\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4})\pi$, con P y Q las series asintóticas

$$P(\nu, z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(\nu, 2k)}{(2z)^{2k}} = 1 - \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)}{4!(8z)^4} - ..., \tag{2.6}$$

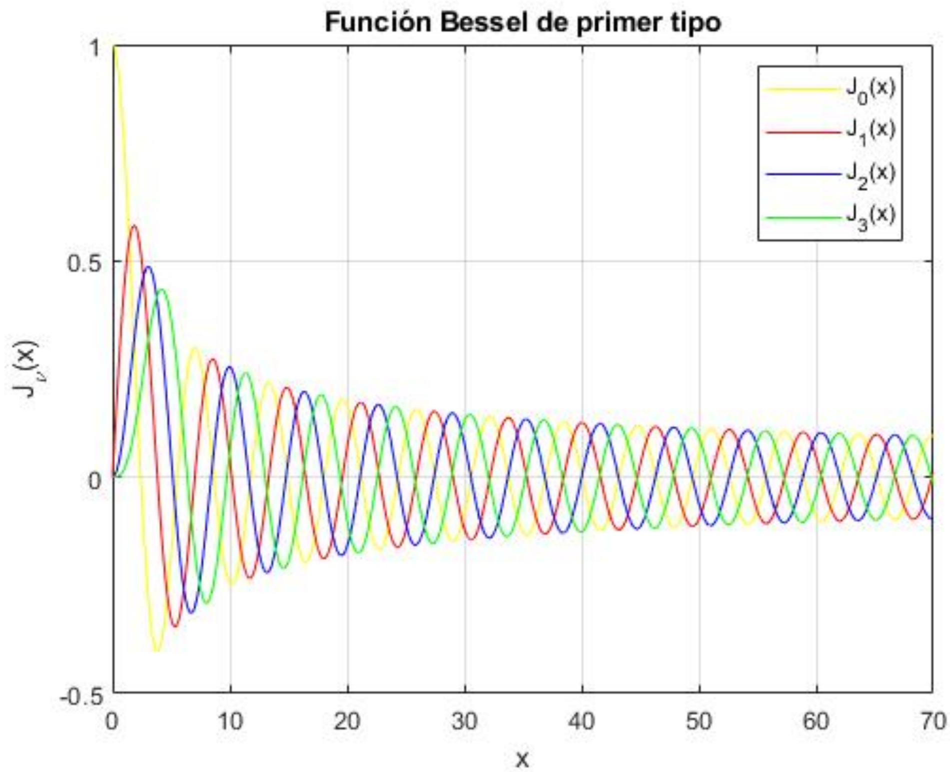

Figura 2.3: Ejemplo de la gráfica de la función Bessel de primer tipo para argumentos reales $x \in [0, 70]$ y órdenes enteros $0, 1, 2$ y 3.

y

$$Q(\nu, z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\nu, 2k+1)}{(2z)^{2k+1}} = \frac{(\mu - 1)}{8z} - \frac{(\mu - 1)(\mu - 9)(\mu - 25)}{3!(8z)^3} + ..., \quad (2.7)$$

donde $\mu = 4\nu^2$ y

$$\begin{aligned} (\nu, k) &= \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)\cdots(4\nu^2 - (2k-1)^2)}{2^{2k} k!}, \ k > 0, \\ (\nu, 0) &\equiv 1. \end{aligned} \quad (2.8)$$

.

2.3. Funciones Bessel de segundo tipo

La función Bessel de segundo tipo (también conocida como la función de Weber) es una solución a la ecuación diferencial de Bessel (2.1), la cual se relaciona con la función Bessel de primer tipo como

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{sin(\nu\pi)}, \tag{2.9}$$

donde $\nu \notin \mathbb{Z}$ es el orden de la función [1].

Debido a la relación que tiene la función Bessel de segundo tipo con la función Bessel de primer tipo, la función Bessel de segundo tipo también puede representarse de tres formas distintas, a través de la función Γ, con su forma integral y por medio de expansiones asintóticas.

2.3.1. Función Digamma

Dada la función Γ (2.2), se tiene que

$$\Psi(z) = \frac{\partial[ln\Gamma(z)]}{\partial z} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}, \tag{2.10}$$

conocida como la función Digamma. La función Bessel de segundo tipo se puede representar por medio de series ascendentes [1], esto es

$$\begin{aligned} Y_\nu(z) &= -\frac{(\frac{z}{2})^{-\nu}}{\pi}\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{(\nu-k-1)!}{k!}\left(-\frac{z^2}{4}\right)^k + \frac{2}{\pi}ln\left(\frac{z}{2}\right)J_\nu(z) \qquad (2.11) \\ &- \frac{(\frac{z}{2})^{\nu}}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\{\Psi(k+1)+\Psi(\nu+k+1)\}\frac{(-\frac{z^2}{4})^k}{k!(\nu+k)!}, \end{aligned}$$

donde $\nu \in \mathbb{R}$ es el orden de la función [1].

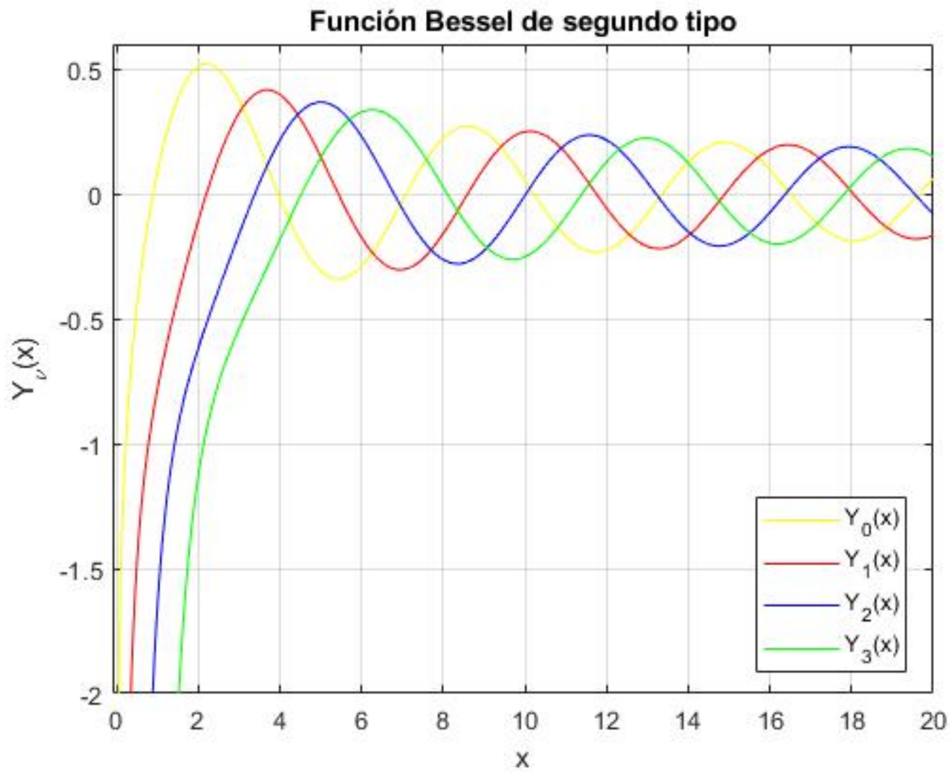

Figura 2.4: Ejemplo de la gráfica de la función Bessel de segundo tipo para argumentos reales $x \in (0, 20]$ y órdenes enteros $0, 1, 2$ y 3.

En la Fig. 2.4 se muestran las gráficas para $\nu = 0, 1, 2, 3$, y el argumento real, lo cual tradicionalmente se denota por x. Como se puede observar, una vez alcanzada la primera raíz de la función después de la singularidad en $x = 0$, la curva oscila rápidamente alrededor del eje x conforme se van presentando las infinitas raíces de $Y_\nu(x)$, y en la Fig. 2.5 se observa que la función decrece rápidamente y tiende a cero.

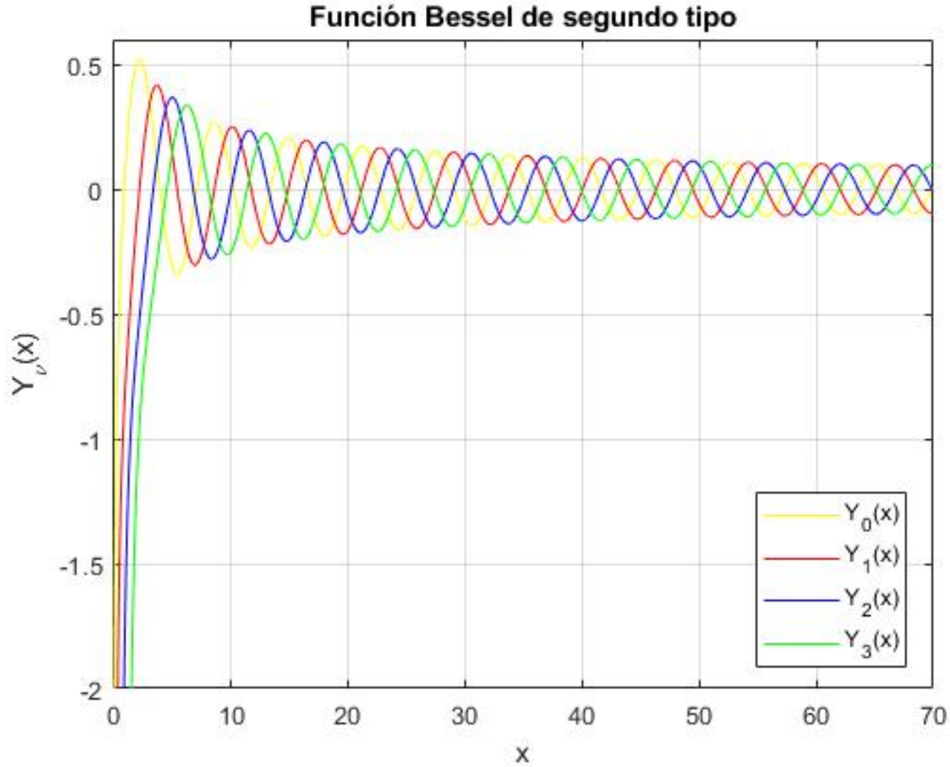

Figura 2.5: Ejemplo de la gráfica de la función Bessel de segundo tipo para argumentos reales $x \in (0, 70]$ y órdenes enteros $0, 1, 2$ y 3.

2.3.2. Representación Integral

Al desarrollar la función Bessel de segundotipo en su forma integral, se tiene que, dependiendo si el argumento tiene un dominio $x > 0$ o $|argz| < \pi/2$, y si el orden de la función $\{\nu > -1/2 | \nu \in \mathbb{R}\}$ o $\{|\nu| < 1/2 | \nu \in \mathbb{R}\}$, existen diferentes formas integrales de representar dicha función [1]. Dado que en este trabajo de tesis se utilizan argumentos en el dominio $x > 0$, se tiene que

$$Y_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi sin(z\, sin\theta - \nu\theta)d\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{\nu t} + e^{-\nu t}cos(\nu\pi)e^{-z\, sinh(t)}dt. \quad (2.12)$$

2.3.3. Expansión Asintótica

La función $Y_\nu(z)$ (al igual que la función $J_\nu(z)$) también puede desarrollarse utilizando series asintóticas para $|z| \to \infty$ [1], mediante

$$Y_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\{P(\nu, z)sinX + Q(\nu, z)cosX\}, \tag{2.13}$$

donde $X = z - (\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4})\pi$, con P y Q las series asintóticas de las ecuaciones (2.6) y (2.7), respectivamente.

Dado que uno de los objetivos de este trabajo de tesis es obtener una metodología para normalizar los argumentos de las funciones Bessel, en el siguiente capítulo se presenta la manera de obtener analíticamente las raíces de las funciones Bessel.

Capítulo 3

Raíces de las Funciones Bessel

Durante el estudio de los ceros de las funciones Bessel encontramos una cantidad infinita de estos, denotando $j_{n,k}$ y $y_{n,k}$ a la k-ésima raíz de las funciones Bessel de primer y segundo tipo de orden n, respectivamente, los cuales estan gobernados por las desigualdades

$$h_{n,1} < h_{n+1,1} < h_{n,2} < h_{n+1,2} < h_{n,3} < ..., \tag{3.1}$$

donde $h_{n,k}$ representa a $j_{n,k}$ o $y_{n,k}$ [1].

3.1. Función Generadora de Ceros

Los ceros de las funciones Bessel de primer y segundo tipo, $J_n(z)$ y $Y_n(z)$, se calculan mediante la serie asintótica

$$h_{n,k} = \beta - \frac{\mu - 1}{8\beta} - \frac{4(\mu - 1)(7\mu - 31)}{3(8\beta)^3} - \frac{32(\mu - 1)(83\mu^2 - 982\mu + 3779)}{15(8\beta)^5} - ..., \tag{3.2}$$

donde $\mu = 4n^2$ [1, 14]. Para $j_{n,k}$, se tiene que

$$\beta = (k + \frac{n}{2} - \frac{1}{4})\pi, \tag{3.3}$$

y para $y_{n,k}$ la expresión es

$$\beta = (k + \frac{n}{2} - \frac{3}{4})\pi. \tag{3.4}$$

En las ecuaciones de frecuencias que se estudian en este trabajo de tesis solamente se tiene el caso $n = 2$, por lo que

$$j_{2,k} = (k + \frac{3}{4})\pi - \frac{15}{2\pi(4k+3)} - \frac{4860}{3 \cdot 2^3\pi^3(4k+3)^3} - \frac{4471200}{15 \cdot 2^5\pi^5(4k+3)^5} + \cdots \tag{3.5}$$

es la k-ésima raíz de $J_2(x)$ y

$$y_{2,k} = (k + \frac{1}{4})\pi - \frac{15}{2\pi(4k+1)} - \frac{4860}{3 \cdot 2^3\pi^3(4k+1)^3} - \frac{4471200}{15 \cdot 2^5\pi^5(4k+1)^5} + \cdots \tag{3.6}$$

es la k-ésima raíz de $Y_2(x)$, lo cual se demuestra en la sección 3.1.1.

3.1.1. Demostración

Dado el tipo de aplicaciones geofísicas que se trabajan en esta tesis se tiene que $n \in \mathbb{N}$, en particular $n = 2$, que $|z|$ es lo suficientemente grande y $|argz| < \pi$, por lo que utilizando la representación por series asintóticas (2.5) y (2.13) [1, 29], se tiene que

$$
\begin{aligned}
J_n(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\left[\cos\left(z-\frac{1}{2}n\pi-\frac{1}{4}\pi\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(n,2m)}{(2z)^{2m}}\right. \\
&- \left.\sin\left(z-\frac{1}{2}n\pi-\frac{1}{4}\pi\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(n,2m+1)}{(2z)^{2m+1}}\right],
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

y

$$
\begin{aligned}
Y_n(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\left[\sin\left(z-\frac{1}{2}n\pi-\frac{1}{4}\pi\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(n,2m)}{(2z)^{2m}}\right. \\
&+ \left.\cos\left(z-\frac{1}{2}n\pi-\frac{1}{4}\pi\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(n,2m+1)}{(2z)^{2m+1}}\right],
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
(n,m) &= \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)\cdots(4n^2-(2m-1)^2)}{2^{2m}m!},\ m>0, \\
(n,0) &\equiv 1.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

De las ecuaciones (2.6) y (2.7) se tiene que

$$
P = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(n,2m)}{(2z)^{(2m)}}, \tag{3.10}
$$

$$
Q = -\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(n,2m+1)}{(2z)^{(2m+1)}}, \tag{3.11}
$$

entonces,

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} P\cos\left(z-\frac{1}{2}n\pi-\frac{1}{4}\pi\right) \\ &+ \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} Q\sin\left(z-\frac{1}{2}n\pi-\frac{1}{4}\pi\right), \end{aligned} \tag{3.12}$$

y

$$\begin{aligned} Y_n(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} P\sin\left(z-\frac{1}{2}n\pi-\frac{1}{4}\pi\right) \\ &- \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} Q\cos\left(z-\frac{1}{2}n\pi-\frac{1}{4}\pi\right). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Sean

$$P = M\cos\varphi, \tag{3.14}$$

$$Q = M\sin\varphi, \tag{3.15}$$

$$M = \sqrt{P^2+Q^2}, \tag{3.16}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{Q}{P}, \tag{3.17}$$

entonces las ecuaciones (3.12) y (3.13) se reescriben como

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} M\cos\varphi\cdot\cos\left(z-\frac{1}{2}n\pi-\frac{1}{4}\pi\right) \\ &+ \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} M\sin\varphi\cdot\sin\left(z-\frac{1}{2}n\pi-\frac{1}{4}\pi\right), \end{aligned} \tag{3.18}$$

y

$$
\begin{aligned}
Y_n(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} M \cos\varphi \cdot \sin\left(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \\
&- \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} M \sin\varphi \cdot \cos\left(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right).
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

Usando la identidad trigonométrica

$$
\cos(A - B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B), \tag{3.20}
$$

la ecuación (3.18) se simplifica en

$$
J_n(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} M \cos\left(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi - \varphi\right). \tag{3.21}
$$

Así, las raíces de $J_n(z)$ son las raíces de $\cos\left(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi - \varphi\right)$, y la k-ésima raíz se obtiene a partir de

$$
z_k - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi - \varphi = k\pi - \frac{\pi}{2}, \tag{3.22}
$$

donde $k \in \mathbb{N}$. Ahora, usando la identidad trigonométrica

$$
\sin(A - B) = \sin(A)\cos(B) - \cos(A)\sin(B), \tag{3.23}
$$

la ecuación (3.19) se simplifica en

$$
Y_n(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} M \sin\left(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi - \varphi\right), \tag{3.24}
$$

y, análogamente, las raíces de $Y_n(z)$ son las raíces de $\sin\left(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi - \varphi\right)$, así la k-ésima raíz se obtiene a partir de

$$z_k - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi - \varphi = k\pi - \pi, \tag{3.25}$$

donde $k \in \mathbb{N}$. De las ecuaciones (3.22) y (3.25) se puede observar que las raíces de $J_n(z)$ y $Y_n(z)$ tienen una diferencia de solo $\frac{\pi}{2}$.

Despejando las ecuaciones (3.22) y (3.25) se tiene que

$$z_k = k\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}n\pi + \frac{1}{4}\pi + \varphi = \left(k + \frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right)\pi + \varphi, \tag{3.26}$$

es la k-ésima raíz de la función $J_n(z)$ y

$$z_k = k\pi - \pi + \frac{1}{2}n\pi + \frac{1}{4}\pi + \varphi = \left(k + \frac{n}{2} - \frac{3}{4}\right)\pi + \varphi, \tag{3.27}$$

es la k-ésima raíz de la función $Y_n(z)$.

Para poder calcular la k-ésima raíz usando las ecuaciones (3.26) y (3.27) primero se tiene que obtener el valor de φ, esto se hace usando la $\tan\varphi$, la cual se puede calcular mediante las ecuaciones (3.14) y (3.15), esto es

$$\begin{aligned}
\tan\varphi &= \frac{Q}{P} = \frac{-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2,2m+1)}{(2z)^{(2m+1)}}}{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2,2m)}{(2z)^{(2m)}}} \\
&= -\frac{\left[\frac{(-1)^0(2,1)}{(2z)^1}+\frac{(-1)^1(2,3)}{(2z)^3}+\frac{(-1)^2(2,5)}{(2z)^5}+\frac{(-1)^3(2,7)}{(2z)^7}+\cdots\right]}{\left[1+\frac{(-1)^1(2,2)}{(2z)^2}+\frac{(-1)^2(2,4)}{(2z)^4}+\frac{(-1)^3(2,6)}{(2z)^6}+\frac{(-1)^4(2,8)}{(2z)^8}+\cdots\right]} \\
&= -\frac{\left[\frac{(4n^2-1)}{8z}-\frac{(4n^2-1)(4n^2-9)(4n^2-25)}{3!(8z)^3}+\frac{(4n^2-1)(4n^2-9)(4n^2-25)(4n^2-49)(4n^2-81)}{5!(8z)^5}-\cdots\right]}{\left[1-\frac{(4n^2-1)(4n^2-9)}{2!(8z)^2}+\frac{(4n^2-1)(4n^2-9)(4n^2-25)(4n^2-49)}{4!(8z)^4}-\cdots\right]}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Para simplificar el álgebra, sean

$$y = \frac{1}{8z} \tag{3.29}$$

y

$$\mu = 4n^2, \tag{3.30}$$

entonces, la ecuación (3.28) se reescribe como

$$\tan\varphi = -(\mu-1)y\frac{\left[1-\frac{(\mu-9)(\mu-25)y^2}{3!}+\frac{(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)(\mu-81)y^4}{5!}-\cdots\right]}{\left[1-\frac{(\mu-1)(\mu-9)y^2}{2!}+\frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)y^4}{4!}-\cdots\right]}. \tag{3.31}$$

Para simplificar la notación, sea

$$f(y) = \frac{\left[1-\frac{(\mu-9)(\mu-25)y^2}{3!}+\frac{(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)(\mu-81)y^4}{5!}-\cdots\right]}{\left[1-\frac{(\mu-1)(\mu-9)y^2}{2!}+\frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)y^4}{4!}-\cdots\right]}, \tag{3.32}$$

que es una división de dos series infinitas de polinomios de orden par.

A $f(y)$ lo podemos aproximar como

$$f(y) = P_n(y) + R_n(y) \tag{3.33}$$

donde $P_n(y)$ es el n-ésimo polinomio de Taylor y $R_n(y)$ es el error de truncamiento por usar $P_n(y)$. En el teorema de Taylor [4] se tiene que $f \in C^n([a,b])$, $f^{(n+1)}$ existe en $[a,b]$ y $\zeta \in [a,b]$, por lo que para cada $y \in [a,b]$, existe un número $\xi(y)$ entre ζ y y, tal que

$$P_n(y) = f(\zeta)+f'(\zeta)(y-\zeta)+\frac{f''(\zeta)}{2!}(y-\zeta)^2+...+\frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}(y-\zeta)^n = \sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(\zeta)}{j!}(y-\zeta)^j \tag{3.34}$$

y

$$R_n(y) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(y))}{(n+1)!}(y-\zeta)^{n+1}. \tag{3.35}$$

Al utilizar el teorema de Taylor con $\zeta = 0$ para aproximar a $f(y)$ de la ecuación (3.32), se tiene que

$$f(y) = 1 + \frac{1}{3}(\mu^2+2\mu-99)y^2 + \frac{2}{15}(\mu-9)(\mu^3+15\mu^2-81\mu-5695)y^4 + \cdots, \tag{3.36}$$

al sustituir esa expresión en la ecuación (3.31), se obtiene que

$$\begin{aligned} \tan\varphi &= -(\mu-1)y\Big\{1+\frac{1}{3}(\mu^2+2\mu-99)y^2 \\ &+ \frac{2}{15}(\mu-9)(\mu^3+15\mu^2-81\mu-5695)y^4+\cdots\Big\} \\ &= -(\mu-1)y - \frac{(\mu-1)(\mu^2+2\mu-99)y^3}{3} \\ &- \frac{2(\mu-1)(\mu-9)(\mu^3+15\mu^2-81\mu-5695)y^5}{15} - \cdots . \end{aligned} \tag{3.37}$$

Ahora, para simplificar la notación en los casos de las raíces de $J_n(z)$ y $Y_n(z)$ en las ecuaciones (3.26) y (3.27), se define

$$\beta_1 = \left(k + \frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right)\pi, \tag{3.38}$$

y

$$\beta_2 = \left(k + \frac{n}{2} - \frac{3}{4}\right)\pi, \tag{3.39}$$

así, las ecuaciones (3.26) y (3.27) se reescriben en una sola ecuación, como

$$z_k \;=\; \beta + \varphi \approx \beta + \tan^{-1}\left\{\frac{A}{8z} + \frac{B}{(8z)^3} + \frac{C}{(8z)^5}\right\}, \tag{3.40}$$

donde β es β_1 o β_2, y

$$A \;=\; -(\mu - 1), \tag{3.41}$$

$$B \;=\; -\left\{\frac{(\mu-1)(\mu^2+2\mu-99)}{3}\right\}, \tag{3.42}$$

$$C \;=\; -\left\{\frac{2(\mu-1)(\mu-9)(\mu^3+15\mu^2-81\mu-5695)}{15}\right\}. \tag{3.43}$$

Ahora, para determinar φ a partir de tanφ de la ecuación (3.37) se usará la serie de Gregory [3]

$$\tan^{-1}(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots, \tag{3.44}$$

que al aplicarla en la ecuación (3.40), se tiene que

$$\begin{aligned} z_k &\approx \beta + \tan^{-1}\left(\frac{A}{8z} + \frac{B}{(8z)^3} + \frac{C}{(8z)^5}\right) = \beta + \left(\frac{A}{8z} + \frac{B}{(8z)^3} + \frac{C}{(8z)^5}\right) \\ &- \frac{1}{3}\left(\frac{A}{8z} + \frac{B}{(8z)^3} + \frac{C}{(8z)^5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{A}{8z} + \frac{B}{(8z)^3} + \frac{C}{(8z)^5}\right)^5 \\ &\approx \beta + \frac{A}{8z_k} + \frac{B}{(8z_k)^3} + \frac{C}{(8z_k)^5} - \frac{1}{3}\left(\frac{A^3}{(8z_k)^3} + \frac{3A^2B}{(8z_k)^5}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{A^5}{(8z_k)^5}\right) \\ &= \beta + \frac{A}{8z_k} + \left(B - \frac{A^3}{3}\right)\frac{1}{(8z_k)^3} + \left(C - A^2B + \frac{A^5}{5}\right)\frac{1}{(8z_k)^5}, \end{aligned} \tag{3.45}$$

así, al sustituir las expresiones para A, B y C de las ecuaciones (3.41)-(3.43), la ecuación (3.45) se reescribe como

$$z_k \approx \beta - \frac{(\mu-1)}{8z_k} - \frac{4(\mu-1)(\mu-25)}{3(8z_k)^3} - \frac{32(\mu-1)(\mu^2-114\mu+1073)}{5(8z_k)^5} + \cdots . \tag{3.46}$$

Sea

$$z_k = \beta + \frac{p}{(z_k)} + \frac{q}{(z_k)^3} + \frac{r}{(z_k)^5} + \cdots , \tag{3.47}$$

donde

$$p = -\frac{(\mu-1)}{8}, \tag{3.48}$$

$$q = -\frac{4(\mu-1)(\mu-25)}{3(8)^3}, \tag{3.49}$$

$$r = -\frac{32(\mu-1)(\mu^2-114\mu+1073)}{5(8)^5}. \tag{3.50}$$

Entonces, se observa de la ecuación (3.47) que z_k está expresada por una serie infinita en términos de z_k. El objetivo es obtener z_k en términos de β, por lo que usando el teorema de reversión de Lagrange [6], el cual dice que para

$$z = w + f(z), \tag{3.51}$$

se puede obtener z en términos de w a partir de

$$z = w + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial w} \right)^{n-1} (f(w))^n. \tag{3.52}$$

Por lo tanto, de la ecuación (3.47) se llega a que

$$z_k = \beta + \frac{p}{\beta} + \frac{q - p^2}{(\beta)^3} + \frac{r - 4pq + p^3}{(\beta)^5} + \cdots , \tag{3.53}$$

y sustituyendo los valores de p, q y r de las ecuaciones (3.48)-(3.50) se tiene que

$$z_k = \beta - \frac{(\mu - 1)}{8\beta} - \frac{4(\mu - 1)(7\mu - 31)}{3(8\beta)^3} - \frac{32(\mu - 1)(83\mu^2 - 982\mu + 3779)}{15(8\beta)^5} - \cdots , \tag{3.54}$$

la cual es la k-ésima raíz de las funciones $J_n(z)$ para $\beta = \beta_1$ y la k-ésima raíz de las funciones $Y_n(z)$ para $\beta = \beta_2$, de las ecuaciones (3.38) y (3.39), respectivamente.

Ya establecida la metodología para normalizar analíticamente los argumentos de las funciones Bessel y obtener las raíces de dichas funciones, en el siguiente capítulo se aplicará esta metodología al problema de los modos torsionales de vibración de cilindros poroelásticos sin fluido (caso seco) enmarcados en la teoría de Biot de viscosidad añadida.

Capítulo 4

Cilindros Poroélasticos

Las raíces obtenidas de las funciones Bessel de primer y segundo tipo se presentan como parte de la solución de las ecuaciones de frecuencia que aparecen en el estudio de vibraciones de cilindros poroélasticos.

4.1. Ecuaciones de Frecuencia

Durante el estudio de los modos torsionales de vibración para cilindros poroelásticos en el caso seco, surge la ecuación de movimiento en función de la frecuencia

$$\beta_{\mathrm{dry}}^2\Big(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\Big)\mathrm{U}^{\mathrm{s}}(r,z,\omega) + \omega^2\mathrm{U}^{\mathrm{s}}(r,z,\omega) \quad = \quad 0, \tag{4.1}$$

la cual proviene de la ecuación (9) de la Ref. [22] para una contribución nula del fluido, esto es

$$\beta_{\mathrm{dry}}^2 \quad = \quad \frac{\mu_0}{\rho_s(1-\eta_0)}, \tag{4.2}$$

dado que se está en el caso seco no se presenta atenuación de las ondas torsionales, y esto se observa en el hecho de que la parte imaginaria es nula.

Se tiene que $\mathrm{U}^{\mathrm{s}}(r, z, \omega)$ es la solución de la ecuación (4.1) (en las ecuaciones (19)-(21) en [22] se muestra el desarrollo para obtener la solución de dicha ecuación), por lo que

$$\mathrm{U}^{\mathrm{s}}(r, z, \omega) = A J_1(q_{\mathrm{dry}}\, r) e^{ikz}, \tag{4.3}$$

donde

$$q_{\mathrm{dry}}^2 = \frac{\omega^2}{\beta_{\mathrm{dry}}^2} - k_{\mathrm{dry}}^2 \neq 0. \tag{4.4}$$

De la condición de frontera

$$\left.\tau_{r\theta}(r, z, \omega)\right|_{r=R} = 0, \tag{4.5}$$

se obtiene que

$$\tau_{r\theta}(r, z, \omega) = B_{\mathrm{dry}} \left(\partial_r - \frac{1}{r} \right) \mathrm{U}^{\mathrm{s}}(r, z). \tag{4.6}$$

Al sustituir la ecuación (4.3) en la ecuación (4.6) y utilizando la relación de recurrencia de las funciones Bessel de primer tipo [3],

$$\frac{\partial}{\partial r} J_1(xr) = -x J_2(xr) + \frac{1}{r} J_1(xr), \tag{4.7}$$

se tiene que

$$0 = \tau_{r\theta}(r, z, \omega)|_{r=R} \;=\; -B_{\mathrm{dry}} A q_{\mathrm{dry}} J_2(q_{\mathrm{dry}} R) e^{ikz}, \tag{4.8}$$

como se busca que no sea una solución trivial $A \neq 0$, $B_{dry} \neq 0$, $q_{dry} \neq 0$, $e^{ikz} \neq 0$, entonces

$$J_2(q_{\mathrm{dry}}\, R) = 0, \tag{4.9}$$

por lo tanto,

$$\varsigma_p^2 = q_{\mathrm{dry}}^2 R^2 = R^2 \left(\frac{\omega^2}{\beta_{\mathrm{dry}}^2} - k_{\mathrm{dry}}^2 \right), \tag{4.10}$$

donde ς_p es la p-ésima raíz de la ecuación de frecuencia (4.9).

4.1.1. Solución para $Y_2(q_{\mathrm{dry}}\, R)$

Dado que las soluciones del problema son gobernadas por las raíces de las funciones Bessel de primer y segundo tipo de orden 2, para comprender mejor lo que sucede en este sistema, se supondrá que de la condición de frontera

$$\tau_{r\theta}(r, z, \omega)|_{r=R} \;=\; 0, \tag{4.11}$$

se tiene que

$$Y_2(q_{\mathrm{dry}}\, R) = 0, \tag{4.12}$$

por lo tanto,

$$\sigma_p^2 = q_{\mathrm{dry}}^2 R^2 = R^2 \left(\frac{\omega^2}{\beta_{\mathrm{dry}}^2} - k_{\mathrm{dry}}^2 \right), \tag{4.13}$$

donde σ_p es la p-ésima raíz de la ecuación de frecuencia (4.12).

4.2. Velocidad de Fase

Como estamos trabajando el caso seco, la onda torsional se propaga sin atenuación y con una velocidad de fase dada por

$$C_\omega^{\mathrm{dry}} = \frac{\omega}{|k_{\mathrm{dry}}|}, \tag{4.14}$$

donde $\omega \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. De la ecuación (4.10), se tiene que

$$k_{\mathrm{dry}}^2 = \frac{\omega^2}{\beta_{\mathrm{dry}}^2} - \frac{\varsigma_p^2}{R^2} \in \mathbb{R}^+, \tag{4.15}$$

que al sustituirla en la ecuación (4.14), la velocidad de fase asociada a la función Bessel de primer tipo y segundo orden

$$C_\omega^{\mathrm{dry}} = \frac{\omega}{|k_{\mathrm{dry}}|} = \frac{\omega}{\left| \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta_{\mathrm{dry}}} - \frac{\varsigma_p^2}{R^2}} \right|}, \tag{4.16}$$

se expresa en términos de la frecuencia (ω), el radio del cilindro (R), la velocidad de la onda del caso seco (β_{dry}) y del p-ésimo modo torsional de vibración ς_p. Al reescribir la ecuación (4.16) como

$$C_\omega^{\rm dry} = \frac{\omega\,\beta_{\rm dry}}{\sqrt{\omega^2 - \frac{\beta_{\rm dry}^2\,\varsigma_p^2}{R^2}}} \in \mathbb{R}^+, \tag{4.17}$$

se obserba que como β_{dry}, ς_p y R son números reales positivos, se tiene de la ecuación (4.17) que $C_\omega^{dry} \in \mathbb{R}^+$ para los valores de ω que cumplan con la desigualdad

$$\omega^2 > \frac{\beta_{\rm dry}^2\,\varsigma_p^2}{R^2}. \tag{4.18}$$

Ahora, para el caso de la ecuación de frecuencia dada por $Y_2(q_{dry}\,R) = 0$ (ecuación (4.12)), de la ecuación (4.13), se tiene que

$$k_{\rm dry}^2 = \frac{\omega^2}{\beta_{\rm dry}^2} - \frac{\sigma_p^2}{R^2} \in \mathbb{R}, \tag{4.19}$$

por lo que, la velocidad de fase asociada a la función Bessel de segundo tipo y segundo orden es

$$C_\omega^{\rm dry} = \frac{\omega}{|k_{\rm dry}|} = \frac{\omega}{\left|\sqrt{\frac{\omega^2}{\beta_{\rm dry}^2} - \frac{\sigma_p^2}{R^2}}\right|} = \frac{\omega\,\beta_{\rm dry}}{\left|\sqrt{\omega^2 - \frac{\beta_{\rm dry}^2\,\sigma_p^2}{R^2}}\right|} \in \mathbb{R}^+, \tag{4.20}$$

se expresa en términos de la frecuencia (ω), el radio del cilindro (R), la velocidad de la onda del caso seco (β_{dry}) y del p-ésimo modo torsional de vibración σ_p, por lo tanto,

$$C_\omega^{\rm dry} = \frac{\omega\,\beta_{\rm dry}}{\sqrt{\omega^2 - \frac{\beta_{\rm dry}^2\,\sigma_p^2}{R^2}}} \in \mathbb{R}^+. \tag{4.21}$$

Puesto que β_{dry}, σ_p y R son números reales positivos, se tiene de la ecuación (4.21) que $C_\omega^{dry} \in \mathbb{R}^+$ para los valores de ω que cumplan con la desigualdad

$$\omega^2 > \frac{\beta_{\mathrm{dry}}^2\, \sigma_p^2}{R^2}. \tag{4.22}$$

Hasta este punto se han obtenido los ceros de ecuaciones de frecuencias de modos torsiones de vibración de cilindros poroelásticos secos, cuya forma es $J_2(q_{dry}R) = 0$ y $Y_2(q_{dry}R) = 0$. Sin embargo, en el caso de anillos cilíndricos la ecuación de frecuencias es de la forma $J_2(q_{dry}r_1)Y_2(q_{dry}r_2) - J_2(q_{dry}r_2)Y_2(q_{dry}r_1) = 0$. Por lo que en el siguiente capítulo se analizará la forma de encontrar la raíces de ese tipo de ecuaciones de frecuencias.

Capítulo 5

Raíces del Producto Cruzado de las Funciones Bessel

Las ecuaciones de frencuencia (1.1) y (1.2) se presentan para anillos cilíndricos con radio interior r_1 y radio exterior r_2 como se muestra en la Fig. 5.1. Dichas ecuaciones son un producto de las funciones Bessel de primer y segundo tipo de orden dos, las raíces de dicho producto son una solución no trivial a las ecuaciones de frecuencia.

5.1. Función Generadora de Ceros

Los ceros del producto de las funciones Bessel de primer y segundo tipo de la forma

$$J_n(z)Y_n(\lambda z) - J_n(\lambda z)Y_n(z) = 0, \tag{5.1}$$

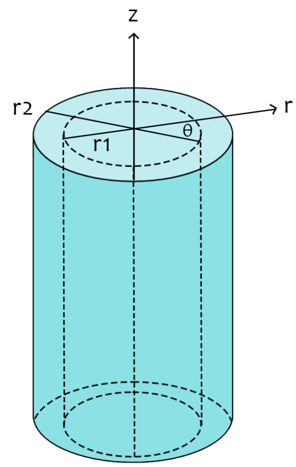

Figura 5.1: Ejemplo de un anillo cilíndrico de radio interior r_1, radio exterior r_2, altura z y un angulo θ.

donde $\lambda < 1$, se calculan mediante la serie asintótica $\iota_{n,k}$

$$\begin{aligned} \iota_{n,k} &= \beta - \frac{(\mu-1)}{8\lambda\beta} - \frac{4}{3(8\lambda\beta)^3}[(\mu^2-26\mu+25)(\lambda^2+1)+(7\mu^2-38\mu+31)\lambda] \\ &- \frac{32}{15(8\lambda\beta)^5}[(3\mu^3-345\mu^2+3219\mu-3219)(\lambda^4+1) \\ &+ (23\mu^3-885\mu^2+4239\mu-3719)(\lambda^3+\lambda) \\ &+ (53\mu^3-975\mu^2+4329\mu-3749)\lambda^2] - \cdots , \end{aligned} \tag{5.2}$$

que genera la k-ésima solución de la ecuación (5.1) [1, 28], donde

$$\mu = 4n^2, \tag{5.3}$$

$$\beta = (k\pi)/(\lambda-1). \tag{5.4}$$

5.1.1. Demostración

Al reescribir en las ecuaciones (3.10) y (3.11) el argumento λz, se tiene que

$$P_\lambda = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (n, 2m)}{(2\lambda z)^{(2m)}}, \tag{5.5}$$

$$Q_\lambda = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (n, 2m+1)}{(\lambda 2z)^{(2m+1)}}, \tag{5.6}$$

entonces,

$$\begin{aligned} J_n(\lambda z) &= \left(\frac{2}{\pi\lambda z}\right)^{1/2} P_\lambda \cos\left(\lambda z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \\ &+ \left(\frac{2}{\pi\lambda z}\right)^{1/2} Q_\lambda \sin\left(\lambda z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right), \end{aligned} \tag{5.7}$$

y

$$\begin{aligned} Y_n(\lambda z) &= \left(\frac{2}{\pi\lambda z}\right)^{1/2} P_\lambda \sin\left(\lambda z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \\ &- \left(\frac{2}{\pi\lambda z}\right)^{1/2} Q_\lambda \cos\left(\lambda z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Sean

$$
\begin{aligned}
P_\lambda &= M_\lambda \cos\varphi_\lambda, && (5.9)\\
Q_\lambda &= M_\lambda \sin\varphi_\lambda, && (5.10)\\
M_\lambda &= \sqrt{P_\lambda^2 + Q_\lambda^2}, && (5.11)\\
\varphi_\lambda &= \tan^{-1}\frac{Q_\lambda}{P_\lambda}, && (5.12)
\end{aligned}
$$

entonces las ecuaciones (5.7) y (5.8) se reescriben como

$$
\begin{aligned}
J_n(\lambda z) &= \left(\frac{2}{\pi\lambda z}\right)^{1/2} M_\lambda \cos\varphi_\lambda \cdot \cos\left(\lambda z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right)\\
&+ \left(\frac{2}{\pi\lambda z}\right)^{1/2} M_\lambda \sin\varphi_\lambda \cdot \sin\left(\lambda z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right),
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

y

$$
\begin{aligned}
Y_n(\lambda z) &= \left(\frac{2}{\pi\lambda z}\right)^{1/2} M_\lambda \cos\varphi_\lambda \cdot \sin\left(\lambda z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right)\\
&- \left(\frac{2}{\pi\lambda z}\right)^{1/2} M_\lambda \sin\varphi_\lambda \cdot \cos\left(\lambda z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right).
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

Usando la identidad trigonométrica de la ecuación (3.20), la ecuación (5.13) se simplifica en

$$
J_n(\lambda z) = \left(\frac{2}{\pi\lambda z}\right)^{1/2} M_\lambda \cos\left(\lambda z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi - \varphi_\lambda\right), \tag{5.15}
$$

y, usando la identidad trigonométrica de la ecuación (3.23) la ecuación (5.14), se simplifica en

$$Y_n(\lambda z) \;=\; \left(\frac{2}{\pi\lambda z}\right)^{1/2} M_\lambda \sin\Big(\lambda z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi - \varphi_\lambda\Big). \tag{5.16}$$

Ahora, al sustituir en la ecuación (5.1) (producto cruzado de funciones Bessel de primer y segundo tipo de orden n), las ecuaciones (3.21),(3.24),(5.15) y (5.16), se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &= J_n(z)Y_n(\lambda z) - J_n(\lambda z)Y_n(z)\\
&= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} M\cos(X)\left(\frac{2}{\pi\lambda z}\right)^{1/2} M_\lambda \sin(X_\lambda)\\
&- \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} M\sin(X)\left(\frac{2}{\pi\lambda z}\right)^{1/2} M_\lambda \cos(X_\lambda)\\
&= \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{\pi z}\right) MM_\lambda\left[\sin(X_\lambda)\cos(X) - \cos(X_\lambda)\sin(X)\right],
\end{aligned} \tag{5.17}$$

donde

$$X = (z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi - \varphi), \tag{5.18}$$

y

$$X_\lambda = (\lambda z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi - \varphi_\lambda). \tag{5.19}$$

Al usar la identidad trigonométrica de la ecuación (3.23) y las ecuaciones (5.18) y (5.19), la ecuación (5.17) se simplifica en

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{\pi z}\right) MM_\lambda \sin(\lambda z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi - \varphi_\lambda - z + \frac{1}{2}n\pi + \frac{1}{4}\pi + \varphi),\\
&= \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{\pi z}\right) MM_\lambda \sin((\lambda - 1)z + \varphi - \varphi_\lambda),
\end{aligned} \tag{5.20}$$

por lo que las raíces de la ecuación (5.1) son las raíces de $\sin((\lambda-1)z+\varphi-\varphi_\lambda)$, y la k-ésima raíz se obtiene a partir de

$$(\lambda-1)z_k+\varphi-\varphi_\lambda=k\pi, \tag{5.21}$$

donde $k\in\mathbb{N}$.

De la ecuación (5.21) se tiene que

$$z_k \;=\; \frac{k\pi}{(\lambda-1)}+\frac{(\varphi_\lambda-\varphi)}{(\lambda-1)}, \tag{5.22}$$

es la k-ésima raíz de la ecuación (5.1).

Para poder calcular la k-ésima raíz usando la ecuación (5.22) primero se tienen que obtener los valores de φ y φ_λ, esto se hace usando la $\tan\varphi$, la cual se calcula a partir de la ecuación (3.31). Siguiendo la metodología desarrollada en la sección 3.1.1. la $\tan\varphi_\lambda$ se reescribe usando las ecuaciones (5.9) y (5.10), como

$$\begin{aligned}
\tan\varphi_\lambda &= \frac{Q_\lambda}{P_\lambda}=\frac{-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2,2m+1)}{(2\lambda z)^{(2m+1)}}}{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2,2m)}{(2\lambda z)^{(2m)}}}\\
&= -\frac{\left[\frac{(-1)^0(2,1)}{(2\lambda z)^1}+\frac{(-1)^1(2,3)}{(2\lambda z)^3}+\frac{(-1)^2(2,5)}{(2\lambda z)^5}+\frac{(-1)^3(2,7)}{(2\lambda z)^7}+\cdots\right]}{\left[1+\frac{(-1)^1(2,2)}{(2\lambda z)^2}+\frac{(-1)^2(2,4)}{(2\lambda z)^4}+\frac{(-1)^3(2,6)}{(2\lambda z)^6}+\frac{(-1)^4(2,8)}{(2\lambda z)^8}+\cdots\right]}\\
&= -\frac{\left[\frac{(4n^2-1)}{8\lambda z}-\frac{(4n^2-1)(4n^2-9)(4n^2-25)}{3!(8\lambda z)^3}+\frac{(4n^2-1)(4n^2-9)(4n^2-25)(4n^2-49)(4n^2-81)}{5!(8\lambda z)^5}-\cdots\right]}{\left[1-\frac{(4n^2-1)(4n^2-9)}{2!(8\lambda z)^2}+\frac{(4n^2-1)(4n^2-9)(4n^2-25)(4n^2-49)}{4!(8\lambda z)^4}-\cdots\right]}.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Para simplificar el álgebra, sean

$$y=\frac{1}{8\lambda z} \tag{5.24}$$

y

$$\mu = 4n^2, \tag{5.25}$$

entonces, la ecuación (5.23) queda como

$$\tan\varphi_\lambda = -(\mu-1)y\frac{\left[1-\frac{(\mu-9)(\mu-25)y^2}{3!}+\frac{(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)(\mu-81)y^4}{5!}-\cdots\right]}{\left[1-\frac{(\mu-1)(\mu-9)y^2}{2!}+\frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)y^4}{4!}-\cdots\right]}. \tag{5.26}$$

Para simplificar la notación, sea

$$f(y) = \frac{\left[1-\frac{(\mu-9)(\mu-25)y^2}{3!}+\frac{(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)(\mu-81)y^4}{5!}-\cdots\right]}{\left[1-\frac{(\mu-1)(\mu-9)y^2}{2!}+\frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)y^4}{4!}-\cdots\right]}, \tag{5.27}$$

que es una división de series infinitas de orden par.

A $f(y)$ lo podemos aproximar con la ecuación (3.36), y al sustituir esa expresión en la ecuación (5.26), se obtiene que

$$\begin{aligned}\tan\varphi_\lambda &= -(\mu-1)y\{1+\frac{1}{3}(\mu^2+2\mu-99)y^2\\ &+ \frac{2}{15}(\mu-9)(\mu^3+15\mu^2-81\mu-5695)y^4+\cdots\}\\ &= -(\mu-1)y-\frac{(\mu-1)(\mu^2+2\mu-99)y^3}{3}\\ &- \frac{2(\mu-1)(\mu-9)(\mu^3+15\mu^2-81\mu-5695)y^5}{15}-\cdots .\end{aligned} \tag{5.28}$$

Ahora, para simplificar la notación de la ecuación (5.22), se define

$$\beta = \frac{k\pi}{(\lambda-1)}, \tag{5.29}$$

así, la ecuación (5.22) se reescribe con lo obtenido en las ecuaciones (3.37) y (5.28) como

$$
\begin{aligned}
z_k &= \beta + \frac{(\varphi_\lambda - \varphi)}{(\lambda - 1)} \\
&\approx \beta + \frac{1}{(\lambda - 1)}\left[\tan^{-1}\left\{\frac{A}{8\lambda z} + \frac{B}{(8\lambda z)^3} + \frac{C}{(8\lambda z)^5}\right\}\right. \\
&- \left.\tan^{-1}\left\{\frac{A}{8z} + \frac{B}{(8z)^3} + \frac{C}{(8z)^5}\right\}\right], \qquad (5.30)
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
A &= -(\mu - 1), \qquad (5.31) \\
B &= -\left\{\frac{(\mu - 1)(\mu^2 + 2\mu - 99)}{3}\right\}, \qquad (5.32) \\
C &= -\left\{\frac{2(\mu - 1)(\mu - 9)(\mu^3 + 15\mu^2 - 81\mu - 5695)}{15}\right\}. \qquad (5.33)
\end{aligned}
$$

Ahora, para determinar φ y φ_λ se usará la serie de Gregory de la ecuación (3.44) [3], por lo que se tiene que

$$
\begin{aligned}
\varphi &\approx \tan^{-1}\left(\frac{A}{8z} + \frac{B}{(8z)^3} + \frac{C}{(8z)^5}\right) \\
&= \left(\frac{A}{8z} + \frac{B}{(8z)^3} + \frac{C}{(8z)^5}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{A}{8z} + \frac{B}{(8z)^3} + \frac{C}{(8z)^5}\right)^3 \\
&+ \frac{1}{5}\left(\frac{A}{8z} + \frac{B}{(8z)^3} + \frac{C}{(8z)^5}\right)^5 \\
&\approx \frac{A}{8z_k} + \frac{B}{(8z_k)^3} + \frac{C}{(8z_k)^5} - \frac{1}{3}\left(\frac{A^3}{(8z_k)^3} + \frac{3A^2B}{(8z_k)^5}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{A^5}{(8z_k)^5}\right) \\
&= \frac{A}{8z_k} + \left(B - \frac{A^3}{3}\right)\frac{1}{(8z_k)^3} + \left(C - A^2B + \frac{A^5}{5}\right)\frac{1}{(8z_k)^5}, \qquad (5.34)
\end{aligned}
$$

y análogamente,

$$
\begin{aligned}
\varphi_\lambda &\approx \tan^{-1}\left(\frac{A}{8\lambda z} + \frac{B}{(8\lambda z)^3} + \frac{C}{(8\lambda z)^5}\right) \\
&\approx \frac{A}{8\lambda z_k} + \left(B - \frac{A^3}{3}\right)\frac{1}{(8\lambda z_k)^3} + \left(C - A^2 B + \frac{A^5}{5}\right)\frac{1}{(8\lambda z_k)^5}, \qquad (5.35)
\end{aligned}
$$

así, sustituyendo A, B y C de las ecuaciones (5.31)-(5.33) en las ecuaciones (5.34) y (5.35), y sustituyendo estos resultados en la ecuación (5.30), agrupando a z por su orden y multiplicando por el mínimo común múltiplo, la k-ésima raíz z_k de la ecuacion (5.1) se reescribe como

$$
\begin{aligned}
z_k &\approx \beta - \frac{(\mu - 1)}{8\lambda z_k} - \frac{4(\mu-1)(\mu-25)(\lambda^3-1)}{3(8\lambda z_k)^3(\lambda-1)} \\
&- \frac{32(\mu-1)(\mu^2-114\mu+1073)(\lambda^5-1)}{5(8\lambda z_k)^5(\lambda-1)} + \cdots . \qquad (5.36)
\end{aligned}
$$

Sea

$$
z_k = \beta + \frac{p}{(z_k)} + \frac{q}{(z_k)^3} + \frac{r}{(z_k)^5} + \cdots , \qquad (5.37)
$$

donde

$$
\begin{aligned}
p &= -\frac{(\mu-1)}{8\lambda}, &(5.38)\\
q &= -\frac{4(\mu-1)(\mu-25)(\lambda^3-1)}{3(8\lambda)^3(\lambda-1)}, &(5.39)\\
r &= -\frac{32(\mu-1)(\mu^2-114\mu+1073)(\lambda^5-1)}{5(8\lambda)^5(\lambda-1)}. &(5.40)
\end{aligned}
$$

Entonces, se observa de la ecuación (5.37) que z_k está expresada por una serie infinita en términos de z_k. El objetivo es obtener z_k en términos de β, por lo que usando el teorema de reversión de Lagrange de la ecuación (3.52) [6], se obtiene z_k como

$$z_k = \beta + \frac{p}{\beta} + \frac{q - p^2}{(\beta)^3} + \frac{r - 4pq + p^3}{(\beta)^5} + \cdots , \tag{5.41}$$

y sustituyendo los valores de p, q y r de las ecuaciones (5.38)-(5.40) se tiene que

$$\begin{aligned} z_k &= \beta - \frac{(\mu - 1)}{8\lambda\beta} - \frac{4}{3(8\lambda\beta)^3}[(\mu^2 - 26\mu + 25)(\lambda^2 + 1) + (7\mu^2 - 38\mu + 31)\lambda] \\ &- \frac{32}{15(8\lambda\beta)^5}[(3\mu^3 - 345\mu^2 + 3219\mu - 3219)(\lambda^4 + 1) \\ &+ (23\mu^3 - 885\mu^2 + 4239\mu - 3719)(\lambda^3 + \lambda) \\ &+ (53\mu^3 - 975\mu^2 + 4329\mu - 3749)\lambda^2] - \cdots \end{aligned} \tag{5.42}$$

lo cual es la k-ésima raíz de la ecuación (5.1).

Ya establecida la metodología para normalizar los argumentos de las funciones Bessel que aparecen en las ecuaciones de frecuencias de la forma $J_n(\lambda z)Y_n(z) - J_n(z)Y_n(\lambda z) = 0$, y encontrar los ceros de dicha ecuación, en el siguiente capítulo se aplicará esta metodología al problema de los modos torsionales de vibración de anillos cilíndricos poroelásticos sin fluido (caso seco) enmarcados en la teoría de Biot de viscosidad añadida.

Capítulo 6

Anillos Cilíndricos Poroélasticos

Las raíces obtenidas del producto cruzado de las funciones Bessel de primer y segundo tipo y orden dos, se presentan como parte de la solución de las ecuaciones de frecuencia que aparecen en el estudio de un anillo cilíndrico poroélastico.

6.1. Ecuaciones de Frecuencia

Durante el estudio de los modos torsionales de vibración para anillos cilíndricos poroélastico, surge la ecuación de movimiento en función de la frecuencia

$$-\omega^2 \mathrm{U}^{\mathrm{s}}(r,z,\omega) \;=\; \beta_{\mathrm{c}}^2\Big(\nabla^2 - \frac{1}{r}\Big)\mathrm{U}^{\mathrm{s}}(r,z,\omega), \tag{6.1}$$

la cual proviene de la ecuación (8) de la Ref. [28] y que se puede reescribir como

$$0 \;=\; \beta_{\mathrm{dry}}^2\Big(\nabla^2 - \frac{1}{r}\Big)\mathrm{U}^{\mathrm{s}}(r,z,\omega) + \omega^2 \mathrm{U}^{\mathrm{s}}(r,z,\omega), \tag{6.2}$$

donde se tiene una contribución nula del fluido dada por

$$\beta_{\text{dry}}^2 = \frac{\mu_0}{\rho_s(1-\eta_0)}, \tag{6.3}$$

como se esta en el caso seco no se presenta atenuacíon de las ondas torsionales, y esto se observa en el hecho de que la parte imaginaria en la ecuacíon (6.3) es nula.

Se tiene que $\mathrm{U}^{\mathrm{s}}(r,z,\omega)$ es la solución de la ecuación (6.2)(en las ecuaciones (8)-(12) en [28] se muestra el desarrollo para obtener la solución a dicha ecuación), por lo que,

$$\mathrm{U}^{\mathrm{s}}(r,z,\omega) = \left[A_1 J_1(q_{\text{dry}}\, r) + A_2 Y_1(q_{\text{dry}}\, r)\right] e^{ikz}, \tag{6.4}$$

donde

$$q_{\text{dry}}^2 = \frac{\omega^2}{\beta_{\text{dry}}^2} - k_{\text{dry}}^2 \neq 0. \tag{6.5}$$

De las condiciones de frontera

$$\tau_{r\theta}(r,z,\omega)|_{r=r_1} = 0, \quad \tau_{r\theta}(r,z,\omega)|_{r=r_2} = 0, \tag{6.6}$$

se tiene que

$$0 = J_2(q_{\text{dry}}\, r_1)Y_2(q_{\text{dry}}\, r_2) - J_2(q_{\text{dry}}\, r_2)Y_2(q_{\text{dry}}\, r_1), \tag{6.7}$$

donde

$$
\begin{aligned}
z &= q_{\text{dry}}\, r_1, & (6.8)\\
\lambda &= \frac{r_2}{r_1} > 1, & (6.9)
\end{aligned}
$$

por tanto, resolver la ecuación (6.7) es equivalente a obtener las raíces de la función [28]

$$0 = f_2(z) = J_2(z)Y_2(\lambda z) - J_2(\lambda z)Y_2(z). \tag{6.10}$$

Sea $z = \xi_p$ la p-ésima raíz no trivial de la ecuación de frecuencia en la ecuación (6.10), entonces

$$\xi_p^2 = q_{\text{dry}}^2 r_1^2 = r_1^2 \left(\frac{\omega^2}{\beta_{\text{dry}}^2} - k_{\text{dry}}^2 \right). \tag{6.11}$$

6.2. Velocidad de Fase

Como se esta trabajando en el caso seco, la onda torsional se propaga sin atenuación y con una velocidad de fase dada por

$$C_\omega^{dry} = \frac{\omega}{|k_{dry}|}, \tag{6.12}$$

donde $\omega \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. De la ecuación (6.11), se tiene que

$$k_{\text{dry}}^2 = \frac{\omega^2}{\beta_{\text{dry}}^2} - \frac{\xi_p^2}{r_1^2} \in \mathbb{R}^+, \tag{6.13}$$

que al sustituirla en la ecuación (6.12), la velocidad de fase asociada a las funciones Bessel de primer y segundo tipo de orden dos

$$C_{\omega}^{\mathrm{dry}} = \frac{\omega}{|k_{\mathrm{dry}}|} = \frac{\omega}{\left|\sqrt{\frac{\omega^2}{\beta_{\mathrm{dry}}^2} - \frac{\xi_p^2}{r_1^2}}\right|}, \tag{6.14}$$

se expresa en términos de la frecuencia (ω), el radio interior del anillo cilíndrico (r_1), la velocidad de la onda del caso seco (β_{dry}) y del p-ésimo modo torsional de vibración (ξ_p). Al reescribir la ecuación (6.14) como

$$C_{\omega}^{\mathrm{dry}} = \frac{\omega\,\beta_{\mathrm{dry}}}{\sqrt{\omega^2 - \frac{\beta_{\mathrm{dry}}^2\,\xi_p^2}{r_1^2}}} \in \mathbb{R}^+, \tag{6.15}$$

se obserba como β_{dry}, ξ_p y r_1 son números reales positivos. Se tiene de la ecuación (6.15) que $C_{\omega}^{dry} \in \mathbb{R}^+$ para los valores de ω que cumplan con la desigualdad

$$\omega^2 > \frac{\beta_{\mathrm{dry}}^2 \xi_p^2}{r_1^2}. \tag{6.16}$$

Capítulo 7

Resultados

Los diferentes modos torsionales de vibración de un cilindro o anillo cilíndrico aparecen a partir de la frecuencia, determinada por las ecuaciones (4.18), (4.22) y (6.16). Así, la frecuencia permitida para cada modo torsional de vibración esta gobernada por el radio, la velocidad de onda del caso seco y del p-ésimo modo torsional de vibración.

A partir de las ecuaciones de frecuencias donde aparecen explícitamente los parámetros del medio es posible desarrollar simulaciones computacionales que nos permitan realizar experimentos numéricos variando las diferentes propiedades del medio, por ende se estarán optimizando recursos, tiempo y en algunos casos evitando poner en riesgo a personas.

7.1. Simulaciones computacionales para cilindros

Las soluciones a las ecuaciones de frecuencia (4.9) y (4.12), obtenidas a partir de la función generadora de ceros (3.54) para $n = 2$ y mostradas en la tabla 7.1, permiten encontrar los valores de la frecuencia ω para cada modo torsional de vibración de un

Tabla 7.1: Valores para ς_p y σ_p en $J_2(\varsigma_p) = 0$ y $Y_2(\sigma_p) = 0$.

p	ς_p	σ_p
1	5.13562	3.38424
2	8.41724	6.79380
3	11.61984	10.02347
4	14.79595	13.20998
5	17.95982	16.37896

cilindro de radio R.

De la ecuación (4.18) se obtiene que las frecuencias permitidas para la velocidad de fase de la ecuación (4.17) son aquellas que cumplen la desigualdad

$$\omega > \frac{\beta_{\mathrm{dry}}\, \varsigma_p}{R}, \tag{7.1}$$

donde β_{dry} es la velocidad de onda asociada al sólido y ς_p es la p-ésima solución de la ecuación de frecuencia relacionada a la función Bessel $J_2(z)$, y de la ecuación (4.22) se obtiene que las frecuencias permitidas para la velocidad de fase de la ecuación (4.21) son aquellas que cumplen con la desigualdad

$$\omega > \frac{\beta_{\mathrm{dry}}\, \sigma_p}{R}, \tag{7.2}$$

donde σ_p es la p-ésima solución de la ecuación de frecuencia relacionada a la función Bessel $Y_2(z)$.

Al calcular β_{dry} a partir de la ecuación (4.2) con los valores del sólido de la tabla 7.2, se tiene que $\beta_{\mathrm{dry}} = 1.553 \times 10^3$ m/s. Así, la velocidad de fase C_ω^{dry} para el modo torsional de vibración ς_p y σ_p se calculan a partir de las frecuencias de las tablas 7.3 y 7.4 para los tres primeros modos de vibración de cilindros de radio R=0.1,0.2,0.3 m. En la Fig. 7.1 se muestra en curvas azul, roja y amarilla la velocidad de fase

C_{ω}^{dry} del primer modo torsional de vibración, obtenida a partir de la ecuación de frecuencia (4.21), para cilindros de radio R= 0.1,0.2,0.3 m, respectivamente. En la Fig. 7.1 se observa que la velocidad de fase se comporta de igual manera para los diferentes radios, las asíntotas verticales muestran los cortes de frecuencia de la tabla 7.3 obtenidos de la ecuación (7.1) para radios R. En la Fig. 7.2 se muestran los valores de la velocidad de fase, las asíntotas verticales muestran los cortes de frecuencia para los valores de ω que cumple la ecuación (7.1) y las curvas azul, roja y amarilla representan los tres primeros modos torsionales de vibración de la tabla 7.1 dado un cilindro de radio $R = 0.1$ m fijo.

Tabla 7.2: Parámetros del sólido de una arenisca.

Parámetros del sólido	Arenisca
Densidad del sólido ρ_s (kg/m^3)	2445
Módulo de cizallamiento del sólido μ_0 (Pa)	3.60×10^9
Porosidad η_0	0.39

Tabla 7.3: Valores de frecuencia ω para calcular la velocidad de fase para los modos torsionales de vibración ς_p de un cilindro de radio R.

R	ς_1	ς_2	ς_3
0.1 m	7.9776 $\times 10^4$ Hz	1.3075 $\times 10^5$ Hz	1.8050 $\times 10^5$ Hz
0.2 m	3.9888 $\times 10^4$ Hz	6.5376 $\times 10^4$ Hz	9.0250 $\times 10^4$ Hz
0.3 m	2.6592 $\times 10^4$ Hz	4.3584 $\times 10^4$ Hz	6.0167 $\times 10^4$ Hz

Tabla 7.4: Valores de frecuencia ω para calcular la velocidad de fase para los modos torsionales de vibración σ_p de un cilindro de radio R.

R	σ_1	σ_2	σ_3
0.1 m	5.2570 $\times 10^4$ Hz	1.0553 $\times 10^5$ Hz	1.5570 $\times 10^5$ Hz
0.2 m	2.6285 $\times 10^4$ Hz	5.2767 $\times 10^4$ Hz	7.7851 $\times 10^4$ Hz
0.3 m	1.7523 $\times 10^4$ Hz	3.5178 $\times 10^4$ Hz	5.1953 $\times 10^4$ Hz

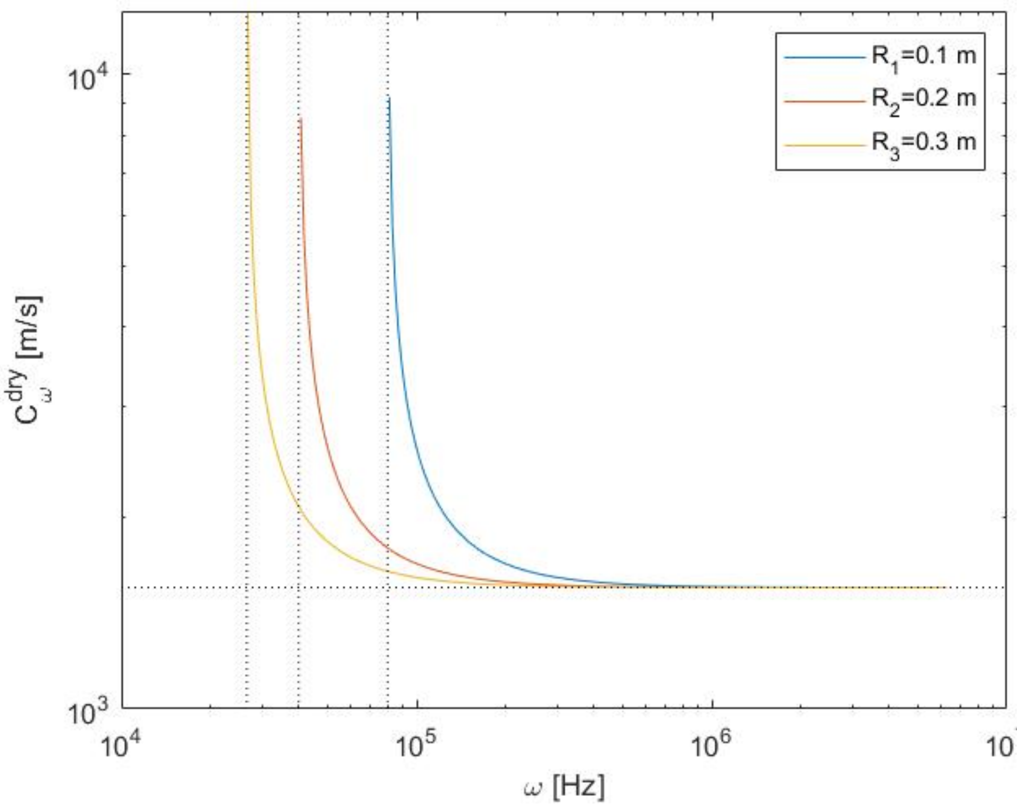

Figura 7.1: Gráfica de la velocidad de fase C_ω^{dry} del primer modo torsional de vibración ς_1 para los valores de ω que satisfacen la ecuación (4.17). Las asíntotas verticales muestran los cortes de frecuencia para cilindros de radios (R) distintos. La asíntota horizontal marca la tendencia de la velocidad de fase a la velocidad de onda β_{dry} como se muestra en la ecuación (7.3).

Como se puede apreciar en la Fig. 7.1, el umbral de frecuencia depende del radio del cilindro. Con lo obtenido de la ecuación (7.1) se puede observar que entre mayor sea el radio R del cilindro la frecuencia tendrá un punto de partida mucho menor, por lo que el rango de frecuencia incrementa de manera directamente proporcional al crecimiento del tamaño del radio. También puede apreciarse que para todos los casos la velocidad de fase tiende al mismo valor asintótico, el cual se obtiene a partir de la ecuación (4.17),

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega\to\infty} C_\omega^{\text{dry}} &= \lim_{\omega\to\infty} \frac{\omega\,\beta_{\text{dry}}}{\sqrt{\omega^2 - \frac{\beta_{\text{dry}}^2\,\varsigma_p^2}{R^2}}} \\
&= \lim_{\omega\to\infty} \frac{\beta_{\text{dry}}}{\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2} - \frac{\beta_{\text{dry}}^2\,\varsigma_p^2}{R^2\,\omega^2}}} \\
&= \lim_{\omega\to\infty} \frac{\beta_{\text{dry}}}{\sqrt{1 - \frac{\beta_{\text{dry}}^2\,\varsigma_p^2}{R^2\,\omega^2}}} = \beta_{\text{dry}},
\end{aligned} \tag{7.3}$$

lo cual coincide con lo que se observa en las gráficas de las Fig. 7.1 y 7.2. Análogamente, para los modos torsionales de vibración de la ecuación (4.21), se puede observar que el valor asintótico horizontal es β_{dry}.

En la Fig. 7.3 se muestra en curvas azul, roja y amarilla la velocidad de fase C_ω^{dry} del primer modo torsional de vibración, obtenido a partir de la ecuación de frecuencia (4.21), para cilindros de radio R= 0.1,0.2,0.3 m, respectivamente. En la Fig 7.3 se observa que la velocidad de fase se comporta de igual manera para los diferentes radios, las asíntotas verticales muestran los cortes de frecuencia de la tabla 7.4 obtenidos de la ecuación (7.2) para radios R. En la Fig. 7.4 se muestran los valores de la velocidad de fase, las asíntotas verticales muestran los cortes de frecuencia para los valores de ω que cumple la ecuación (7.2) y las curvas azul, roja y amarilla representan los tres primeros modos torsionales de vibración de la tabla 7.1 dado un cilindro de radio $R = 0.1$ m. En la Fig.7.4 se observa que la velocidad de fase de los modos torsionales se comportan de igual manera para cada modo, donde el corte de frecuencia de cada modo se presentara a una frecuencia mayor que el anterior concordando con los resultados obtenidos en la tabla 7.4, lo que implica un menor rango de frecuencias permitidas a partir de la ecuación (7.2) para los modos torsionales de vibración consecuentes.

7.1.1. Análisis de velocidad de fase al variar la densidad del sólido ρ_s

En la Fig. 7.5 se muestra en las curvas azul, roja, amarilla, morada, verde, celeste y rosa, la velocidad de fase C_ω^{dry} del primer modo torsional de vibración ς_1, obtenido a partir de la ecuación de frecuencia (4.17), para cilindros de radio R=0.1 m, con densidades ρ_s^j de 300 Kg/m^3 a 1500 Kg/m^3 con tamaño de paso de 200 Kg/m^3. En la Fig. 7.5 se observa que la velocidad de fase C_ω^{dry} se comportan de igual manera, tendiendo a su respectiva velocidad de onda del caso seco β_{dry}^j a partir de los cortes de frecuencia correspondientes de la tabla 7.5 obtenidos de las ecuaciones (4.2) y (7.1).

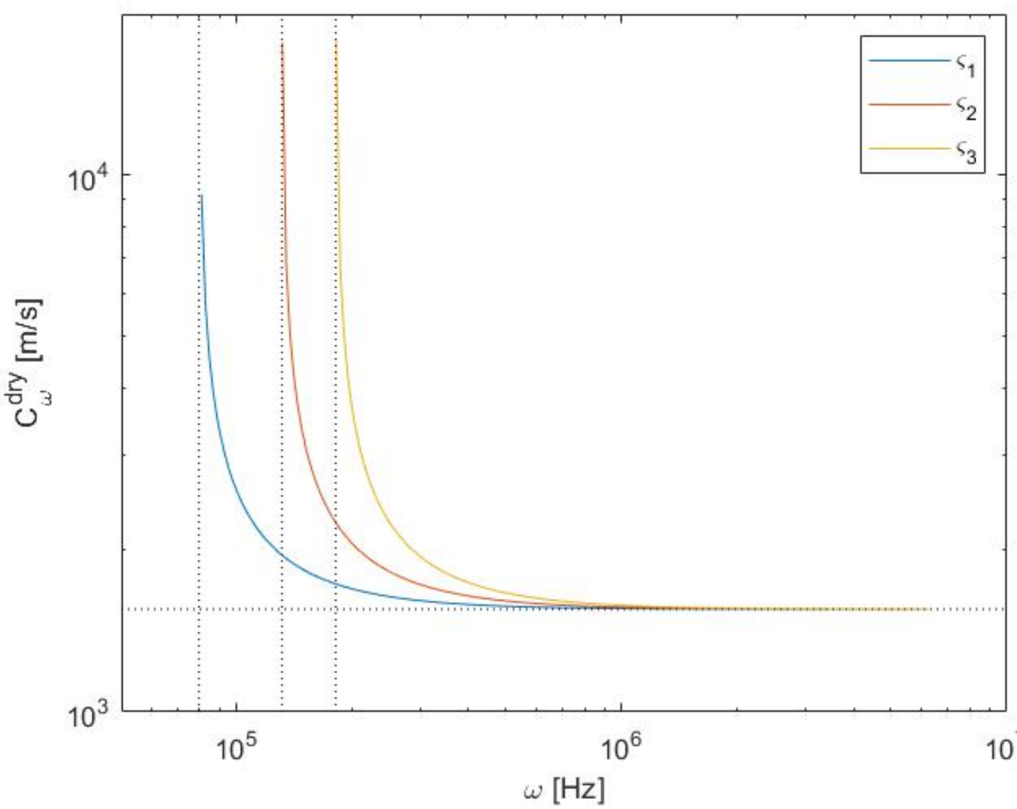

Figura 7.2: Gráfica de la velocidad de fase C_ω^{dry} de los modos torsionales de vibración de un cilindro de radio R=0.1 m para los valores de ω que satisfacen la ecuación (4.17). Las asíntotas verticales muestran los cortes de frecuencia para los tres primeros modos torsionales de vibración (ς_p). La asíntota horizontal marca la tendencia de la velocidad de fase a la velocidad de onda β_{dry} como se muestra en la ecuación (7.3).

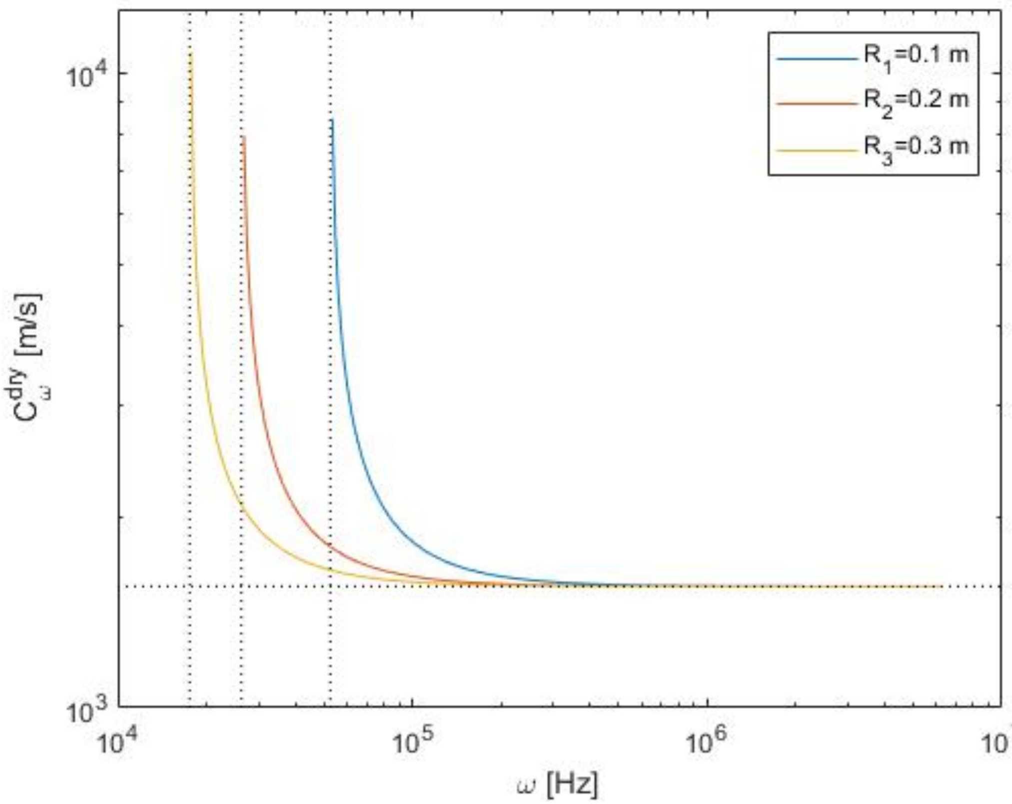

Figura 7.3: Gráfica de la velocidad de fase C_ω^{dry} del primer modo torsional de vibración σ_1 para los valores de ω que satisfacen la ecuación (4.21). Las asíntotas verticales muestran los cortes de frecuencia para cilindros de radios (R) distintos. La asíntota horizontal marca la tendencia de la velocidad de fase a la velocidad de onda β_{dry} como se muestra en la ecuación (7.3).

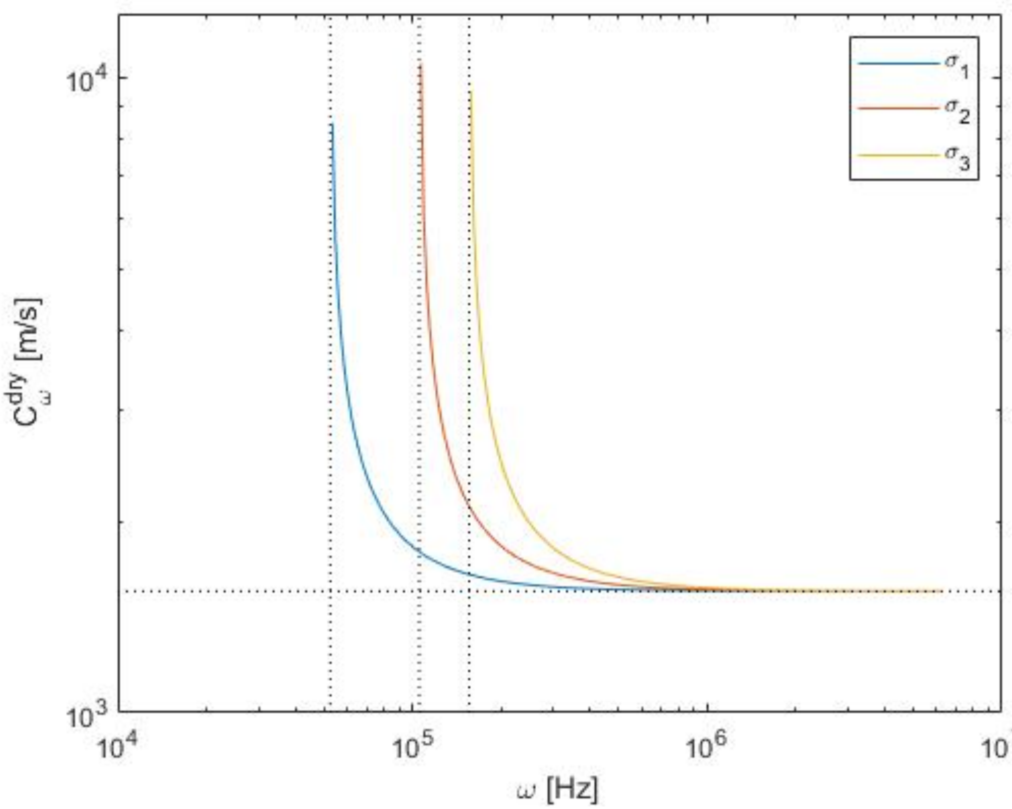

Figura 7.4: Gráfica de la velocidad de fase C_ω^{dry} de los modos torsionales de vibración de un cilindro de radio R=0.1 m para los valores de ω que satisfacen la ecuación (4.21). Las asíntotas verticales muestran los cortes de frecuencia para los tres primeros modos torsionales de vibración (σ_p). La asíntota horizontal marca la tendencia de la velocidad de fase a la velocidad de onda β_{dry} como se muestra en la ecuación (7.3).

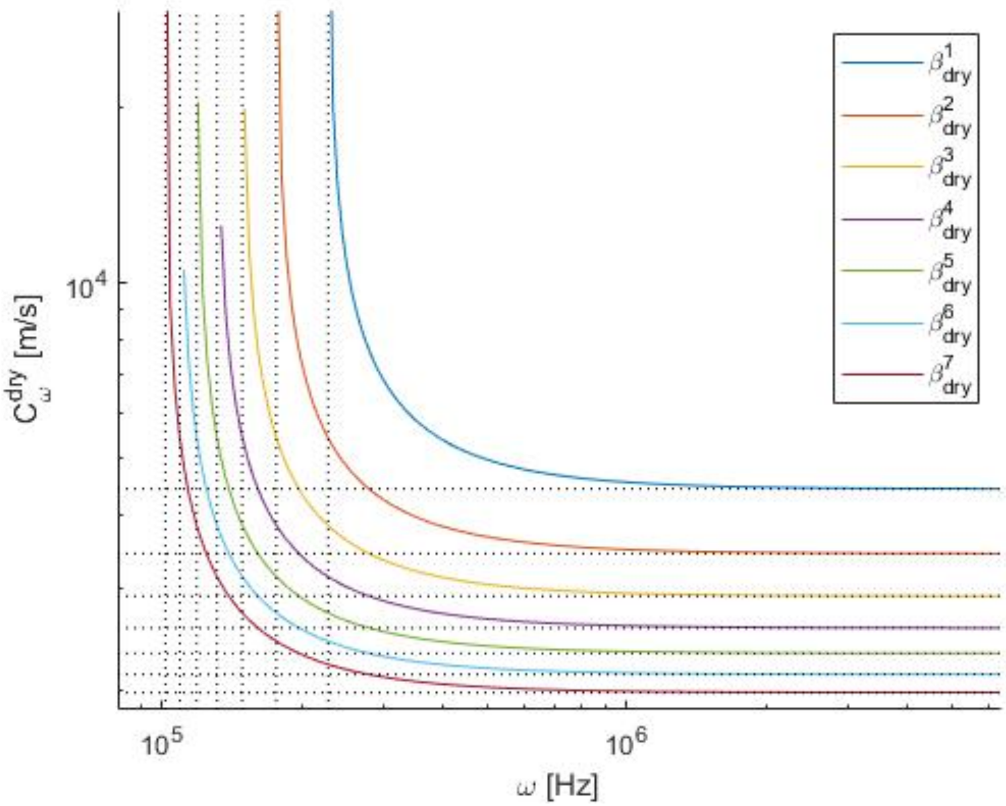

Figura 7.5: Gráfica de la velocidad de fase C_ω^{dry} del primer modo torsional de vibración ς_1 de un cilindro de radio R=0.1 m para los valores de ω que satisfacen la ecuación (4.17). Las asíntotas verticales muestran los cortes de frecuencia para los cilindros con una velocidad de onda β^j_{dry} obtenidas a partir de sólidos con densidades ρ^j_s, para $j = 1, 2, \ldots, 7$. Las asíntotas horizontales marcan la tendencia de las β^j_{dry} como se muestra en la ecuación (7.3).

Tabla 7.5: Valores de frecuencia ω y velocidad β^j_{dry} utilizados para calcular la velocidad de fase para el primer modo torsional de vibración ς_1 de un cilindro de radio R=0.1 m variando los valores de la densidad del sólido ρ^j_s.

j	ρ^j_s (kg/m^3)	β^j_{dry} (m/s)	ω (Hz)
1	300	4.4353×10^3	2.6778×10^5
2	500	3.4356×10^3	1.7644×10^5
3	700	2.9036×10^3	1.4912×10^5
4	900	2.5607×10^3	1.3151×10^5
5	1100	2.3163×10^3	1.1896×10^5
6	1300	2.1307×10^3	1.0942×10^5
7	1500	1.9835×10^3	1.0187×10^5

Como se puede apreciar en la Fig 7.5, el umbral de frecuencia depende de la velocidad de onda de la matriz solida sin fluido β^j_{dry}. Con lo obtenido de la ecuación (7.1) se puede observar que entre mayor sea la densidad del sólido ρ^j_s menor es la velocidad de onda β^j_{dry} y la frecuencia tendrá un punto de partida menor, por lo que el rango de frecuencia incrementa de manera directamente proporcional al crecimiento de la densidad del sólido del cilindro. También puede apreciarse que para todos los casos la velocidad de fase C^{dry}_ω tiende a valor asintótico dictado por la velocidad de onda β^j_{dry} correspondiente, lo cual coincide con lo observado en la ecuación (7.3).

7.1.2. Análisis de velocidad de fase al variar el módulo de cizallamiento μ_0

En la Fig. 7.6 se muestra en las curvas azul, roja, amarilla, morada, verde, celeste y rosa, la velocidad de fase C^{dry}_ω del primer modo torsional de vibración ς_1, obtenido a partir de la ecuación de frecuencia (4.17), para cilindros de radio R=0.1 m, con módulos de cizallamiento del sólido μ^j_0 de 2×10^9 Pa a 5×10^9 Pa con tamaño de paso de 5×10^8 Pa. En la Fig. 7.6 se observa que la velocidad de fase C^{dry}_ω se comportan de igual manera, tendiendo a su respectiva velocidad de onda del caso seco β^j_{dry} a partir de los cortes de frecuencia correspondientes de la tabla 7.6 obtenidos de las ecuaciones (4.2) y (7.1).

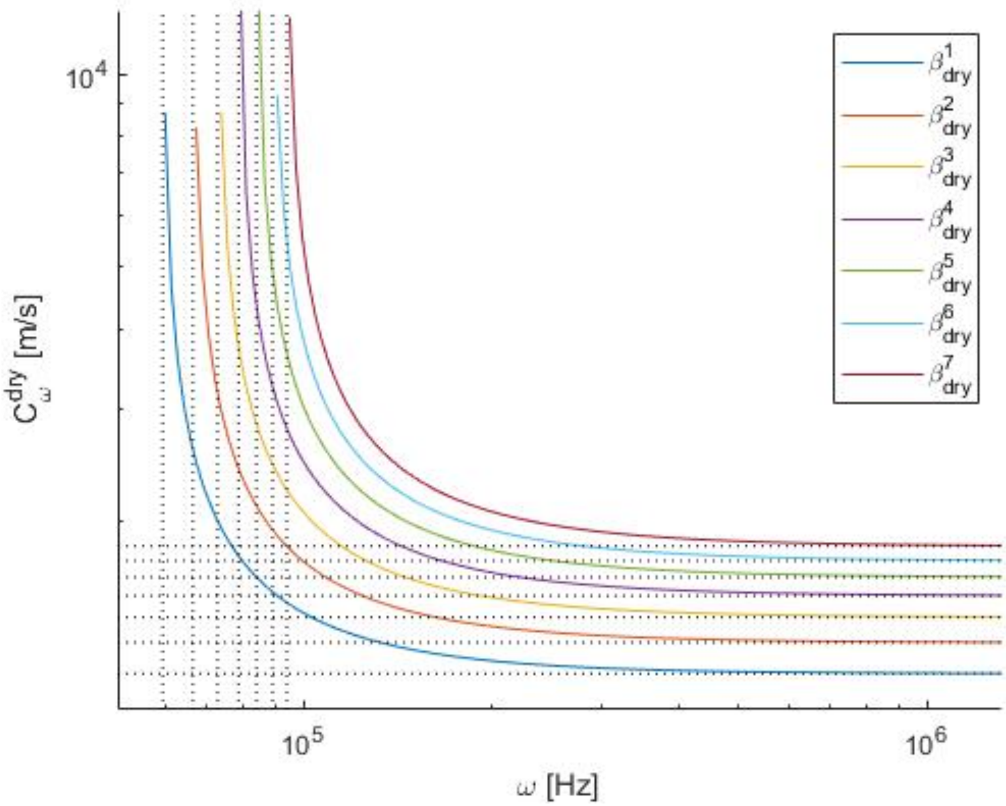

Figura 7.6: Gráfica de la velocidad de fase C^{dry}_{ω} del primer modo torsional de vibración ς_1 de un cilindro de radio R=0.1 m para los valores de ω que satisfacen la ecuación (4.17). Las asíntotas verticales muestran los cortes de frecuencia para los cilindros con una velocidad de onda β^j_{dry} obtenidas a partir de sólidos con módulos de cizallamiento del sólido μ^j_0, para $j = 1, 2, \ldots, 7$. Las asíntotas horizontales marcan la tendencia de las β^j_{dry} como se muestra en la ecuación (7.3).

Como se puede apreciar, el umbral de frecuencia depende de la velocidad de onda de la matriz solida sin fluido β^j_{dry}. Con lo obtenido de la ecuación (7.1) se puede observar que entre mayor sea el módulo de cizallamiento del sólido mayor es

Tabla 7.6: Valores de frecuencia ω y velocidad β^j_{dry} utilizados para calcular la velocidad de fase para el primer modo torsional de vibración ς_1 de un cilindro de radio R=0.1 m a partir de distintos valores del módulo de cizallamiento del sólido μ^j_0.

j	μ^j_0 (Pa)	β^j_{dry} (m/s)	ω (Hz)
1	2×10^9	1.1580×10^3	5.9471×10^4
2	2.5×10^9	1.2947×10^3	6.6490×10^4
3	3×10^9	1.4183×10^3	7.2837×10^4
4	3.5×10^9	1.5319×10^3	7.8672×10^4
5	4×10^9	1.6377×10^3	8.4104×10^4
6	4.5×10^9	1.7370×10^3	8.9206×10^4
7	5×10^9	1.8310×10^3	9.4032×10^4

la velocidad de onda β^j_{dry} y la frecuencia tendrá un punto de partida menor, por lo que el rango de frecuencia disminuye de manera directamente proporcional al crecimiento del módulo de cizallamiento del sólido del cilindro μ^j_0.

7.1.3. Análisis de velocidad de fase al variar la porosidad η_0

En la Fig. 7.7 se muestra en las curvas azul, roja, amarilla, morada, verde, celeste y rosa, la velocidad de fase C^{dry}_ω del primer modo torsional de vibración, obtenido a partir de la ecuación de frecuencia (4.17), para cilindros de radio R=0.1 m, con porosidad η^j_0 de 0.2 a 0.8 con tamaño de paso de 0.1. En la Fig. 7.7 se observa que la velocidad de fase C^{dry}_ω se comportan de igual manera, tendiendo a su respectiva velocidad de onda del caso seco β^j_{dry} a partir de los cortes de frecuencia correspondientes de la tabla 7.7 obtenidos de las ecuaciones (4.2) y (7.1).

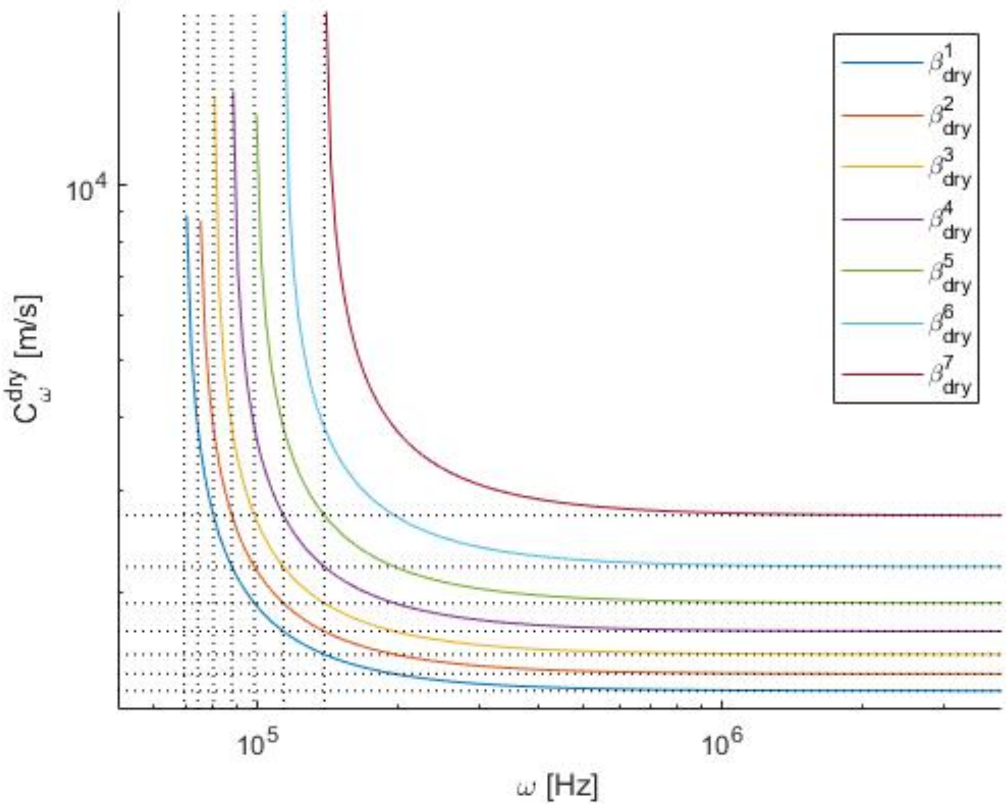

Figura 7.7: Gráfica de la velocidad de fase C_ω^{dry} del primer modo torsional de vibración ς_1 de un cilindro de radio R=0.1 m para los valores de ω que satisfacen la ecuación (4.17). Las asíntotas verticales muestran los cortes de frecuencia para los cilindros con una velocidad de onda β^j_{dry} obtenidas a partir de sólidos con porosidades η^j_0, para $j = 1, 2, \ldots, 7$. Las asíntotas horizontales marcan la tendencia de las β^j_{dry} como se muestra en la ecuación (7.3).

Tabla 7.7: Valores de frecuencia ω y velocidad β^j_{dry} utilizados para calcular la velocidad de fase para el primer modo torsional de vibración ς_1 de un cilindro de radio R=0.1 m a partir de distintos valores de la porosidad η^j_0.

j	η^j_0	β^j_{dry} (m/s)	ω (Hz)
1	0.2	1.3566 $\times 10^3$	6.9672 $\times 10^4$
2	0.3	1.4503 $\times 10^3$	7.4483 $\times 10^4$
3	0.4	1.5665 $\times 10^3$	8.0451 $\times 10^4$
4	0.5	1.7160 $\times 10^3$	8.8129 $\times 10^4$
5	0.6	1.9186 $\times 10^3$	9.8531 $\times 10^4$
6	0.7	2.2154 $\times 10^3$	1.1377 $\times 10^5$
7	0.8	2.7133 $\times 10^3$	1.3934 $\times 10^5$

Como se puede apreciar, el umbral de frecuencia depende de la velocidad de onda de la matriz solida sin fluido β^j_{dry}. Con lo obtenido de la ecuación (7.1) se puede observar que entre mayor sea porosidad del sólido η^j_0 mayor es la velocidad de onda β^j_{dry} y la frecuencia tendrá un punto de partida mayor, por lo que el rango de frecuencias disminuye de manera directamente proporcional al crecimiento de la porosidad del sólido del cilindro η^j_0.

7.2. Simulaciones computacionales para anillos cilíndricos

Las soluciones a la ecuación de frecuencia (6.10), obtenida a partir de la función generadora de ceros (5.42) para $n = 2$ y mostradas en las tablas 7.8, 7.9 y 7.10, permiten encontrar los valores de la frecuencia ω para cada modo torsional de vibración de un anillo cilíndrico de radio interior y exterior r_1 y r_2, respectivamente.

De la ecuación (6.16) se obtiene que las frecuencias permitidas para la velocidad

Tabla 7.8: Valores para ξ_p que satisfacen la ecuación (6.10) para anillos cilíndricos de grosor de 0.2 m y radio interior r_1.

p	ξ_p	r_1=0.2 m	r_1=0.4 m	r_1=0.6 m
1	ξ_1	3.40692	6.47424	9.57097
2	ξ_2	6.42777	12.66481	18.92377
3	ξ_3	9.52285	18.91556	28.32395
4	ξ_4	12.64038	25.18234	37.73636
5	ξ_5	15.76734	31.45564	47.15370

Tabla 7.9: Valores para ξ_p que satisfacen la ecuación (6.10) para anillos cilíndricos de grosor de 0.4 m y radio interior r_1.

p	ξ_p	r_1=0.2 m	r_1=0.4 m	r_1=0.6 m
1	ξ_1	1.86799	3.40692	4.93630
2	ξ_2	3.32383	6.42776	9.54217
3	ξ_3	4.83981	9.52285	14.21615
4	ξ_4	6.38043	12.64038	18.90898
5	ξ_5	7.93241	15.76734	23.60956

Tabla 7.10: Valores para ξ_p que satisfacen la ecuación (6.10) para anillos cilíndricos de grosor de 0.6 m y radio interior r_1.

p	ξ_p	r_1=0.2 m	r_1=0.4 m	r_1=0.6 m
1	ξ_1	1.32999	2.38637	3.40692
2	ξ_2	2.28610	4.35777	6.42776
3	ξ_3	3.28037	6.39947	9.52285
4	ξ_4	4.29619	8.46579	12.64038
5	ξ_5	5.32318	10.54291	15.76734

de fase de la ecuación (6.15) son aquellas que cumplen la desigualdad

$$\omega > \frac{\beta_{\mathrm{dry}}\, \xi_p}{r_1}, \tag{7.4}$$

donde β_{dry} es la velocidad de onda asociada a la matriz sólida sin fluido (caso seco) y ξ_p es la p-ésima solución de la ecuación de frecuencia (6.10).

En las Fig. 7.8, 7.9, 7.10, 7.11, 7.12, 7.13, 7.14, 7.15 y 7.16 se muestran en las curvas azules, rojas y amarillas la velocidad de fase C_{ω}^{dry} de los modos torsionales de vibración ξ_p, respectivamente, obtenidas a partir de la ecuación de frecuencia (6.15), para los anillos cilíndricos de radio interior r_1= 0.2,0.4,0.6 m y grosores de 0.2, 0.4 y 0.6 m. En estas gráficas se observa que la velocidad de fase C_{ω}^{dry} se comportan de igual manera para cada modo torsional de vibración del anillo cilíndrico ξ_p de radio interior r_1, las asíntotas verticales muestran los cortes de frecuencia de las tablas 7.11, 7.12 y 7.13 obtenidos de la ecuación (7.4) para cada radio interior r_1.

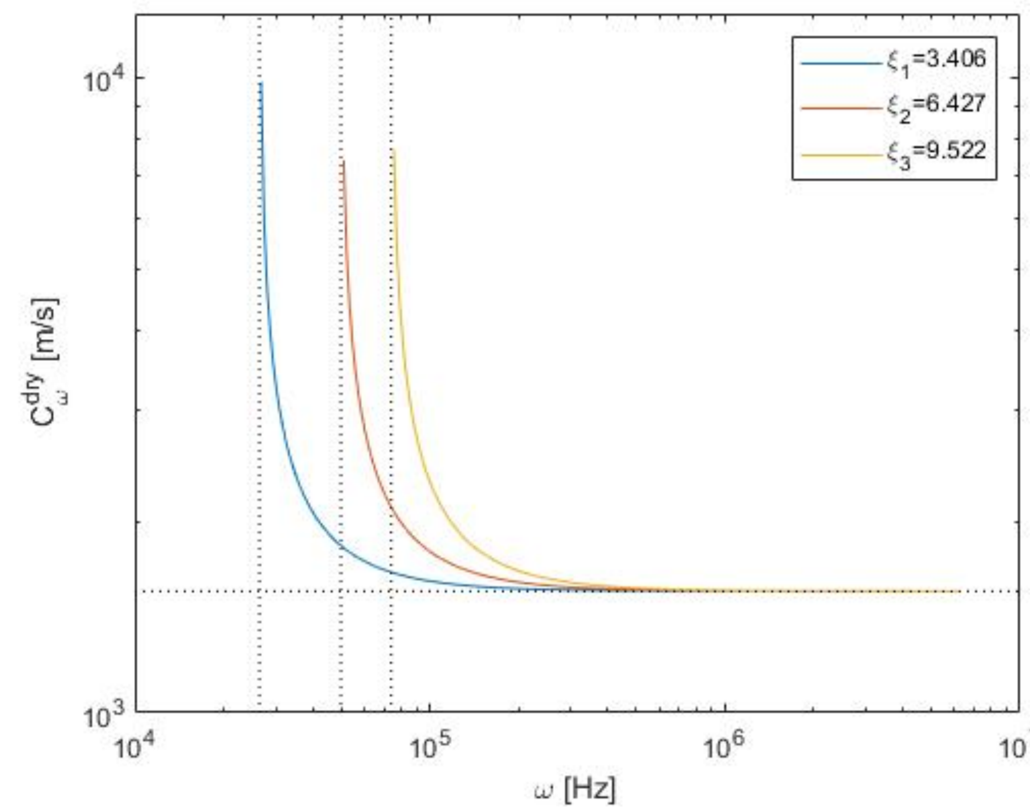

Figura 7.8: Gráfica de la velocidad de fase C_ω^{dry} de los modos torsionales de vibración de un anillo cilíndrico de radio interior r_1=0.2 m y de grosor $r_2 - r_1$=0.2 m, para los valores de ω que satisfacen la ecuación (6.16). Las asíntotas verticales muestran los cortes de frecuencia para los tres primeros modos torsionales de vibración (ξ_p). La asíntota horizontal marca la tendencia de la velocidad de fase a la velocidad de onda β_{dry} como se muestra en la ecuación (7.3).

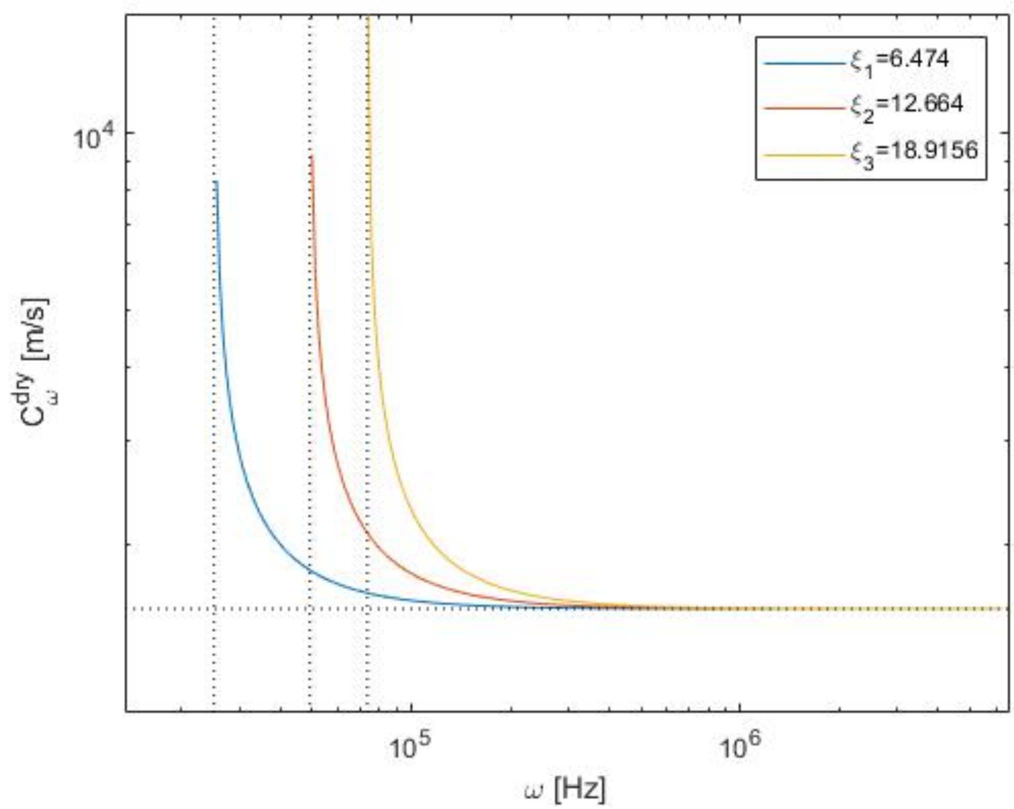

Figura 7.9: Gráfica de la velocidad de fase C_ω^{dry} de los modos torsionales de vibración de un anillo cilíndrico de radio interior r_1=0.4 m y de grosor $r_2 - r_1$=0.2 m, para los valores de ω que satisfacen la ecuación (6.16). Las asíntotas verticales muestran los cortes de frecuencia para los tres primeros modos torsionales de vibración (ξ_p). La asíntota horizontal marca la tendencia de la velocidad de fase a la velocidad de onda β_{dry} como se muestra en la ecuación (7.3).

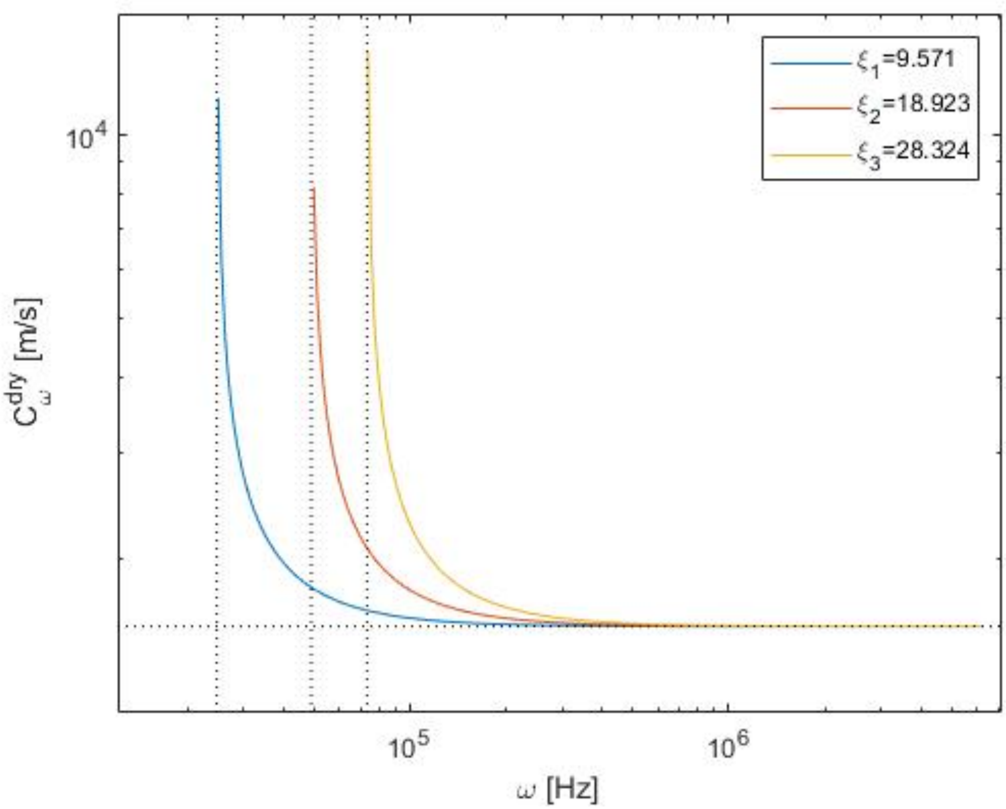

Figura 7.10: Gráfica de la velocidad de fase C_ω^{dry} de los modos torsionales de vibración de un anillo cilíndrico de radio interior r_1=0.6 m y de grosor $r_2 - r_1$=0.2 m, para los valores de ω que satisfacen la ecuación (6.16). Las asíntotas verticales muestran los cortes de frecuencia para los tres primeros modos torsionales de vibración (ξ_p). La asíntota horizontal marca la tendencia de la velocidad de fase a la velocidad de onda β_{dry} como se muestra en la ecuación (7.3).

Tabla 7.11: Valores de frecuencia ω para calcular la velocidad de fase para los modos torsionales de vibración ξ_p de un anillo cilíndrico de radio interior r_1 y grosor de 0.2 m.

r_1	ξ_1	ξ_2	ξ_3
0.2 m	2.6465×10^4 Hz	4.9932×10^4 Hz	7.3975×10^5 Hz
0.4 m	2.5146×10^4 Hz	4.9191×10^4 Hz	7.3469×10^4 Hz
0.6 m	2.4783×10^4 Hz	4.9001×10^4 Hz	7.3341×10^4 Hz

Tabla 7.12: Valores de frecuencia ω para calcular la velocidad de fase para los modos torsionales de vibración ξ_p de un anillo cilíndrico de radio interior r_1 y grosor de 0.4 m.

r_1	ξ_1	ξ_2	ξ_3
0.2 m	1.4511×10^4 Hz	2.5820×10^4 Hz	3.7596×10^4 Hz
0.4 m	1.3233×10^4 Hz	2.4966×10^4 Hz	3.6987×10^4 Hz
0.6 m	1.2782×10^4 Hz	2.4708×10^4 Hz	3.6811×10^4 Hz

Tabla 7.13: Valores de frecuencia ω para calcular la velocidad de fase para los modos torsionales de vibración ξ_p de un anillo cilíndrico de radio interior r_1 y grosor de 0.6 m.

r_1	ξ_1	ξ_2	ξ_3
0.2 m	1.0332×10^4 Hz	1.7759×10^4 Hz	2.5482×10^4 Hz
0.4 m	9.2688×10^3 Hz	1.6926×10^4 Hz	2.4856×10^4 Hz
0.6 m	8.8218×10^3 Hz	1.6644×10^4 Hz	2.4658×10^4 Hz

Como se puede apreciar en las Fig. 7.8, 7.9 y 7.10, el umbral de frecuencia depende del modo torsional de vibración del anillo cilíndrico ξ_p. Con lo obtenido de la ecuación (7.4) se puede observar que entre mayor sea el valor del modo torsional de vibración ξ_p mayor será el punto de partida de las frecuencias permitidas, por lo que el rango de frecuencias disminuye de manera directamente proporcional al crecimiento del valor del modo torsional de vibración del anillo cilíndrico. También puede apreciarse que para todos los casos la velocidad de fase tiende al valor asintótico dictado por la velocidad de onda del caso seco β_{dry}, lo cual coincide con lo observado en la ecuación (7.3). Por otro lado, en la tabla 7.11 se puede observar que los cortes de frecuencias de los tres anillos cilíndricos con el mismo grosor tienen una separación del mismo tamaño para sus diferentes modos torsionales de vibración.

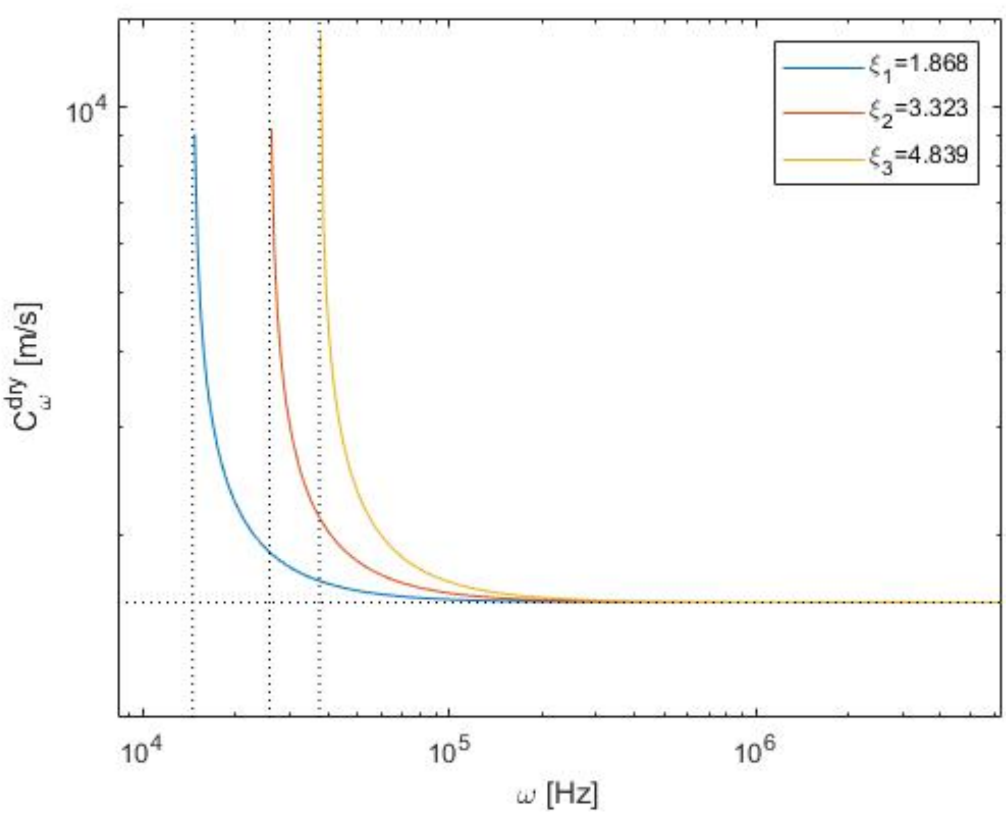

Figura 7.11: Gráfica de la velocidad de fase C_ω^{dry} de los modos torsionales de vibración de un anillo cilíndrico de radio interior r_1=0.2 m y de grosor $r_2 - r_1$=0.4 m, para los valores de ω que satisfacen la ecuación (6.16). Las asíntotas verticales muestran los cortes de frecuencia para los tres primeros modos torsionales de vibración ξ_p. La asíntota horizontal marca la tendencia de la velocidad de fase a la velocidad de onda β_{dry} como se muestra en la ecuación (7.3).

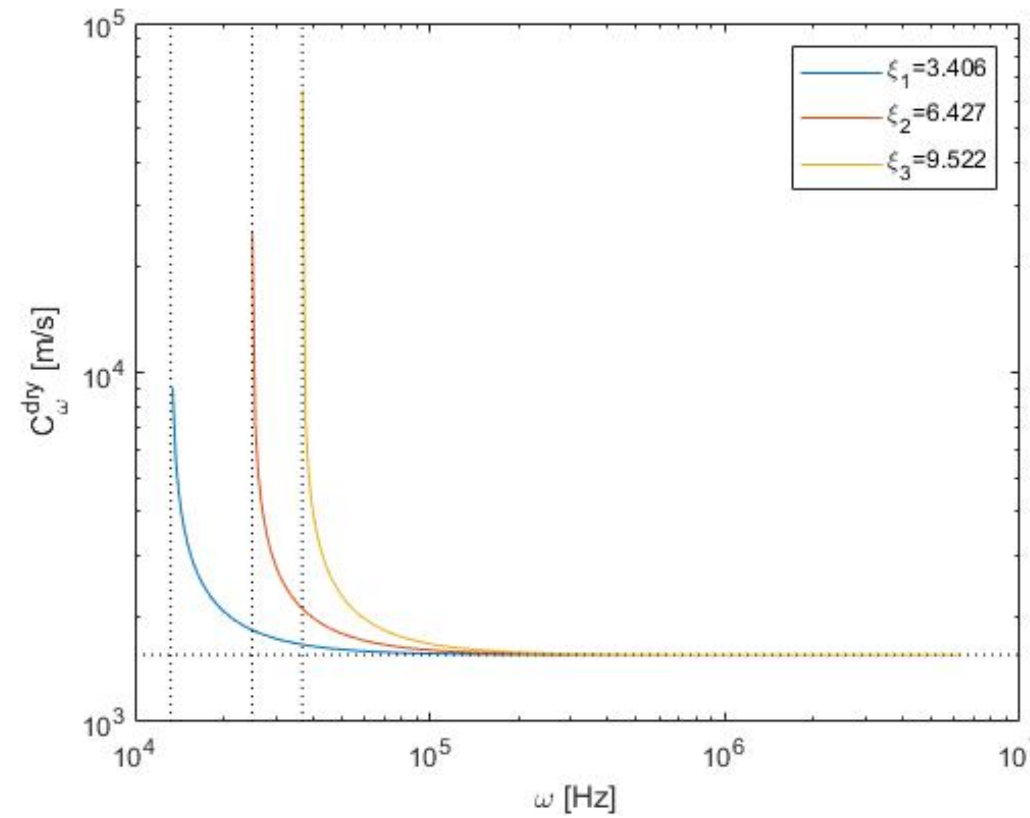

Figura 7.12: Gráfica de la velocidad de fase C_ω^{dry} de los modos torsionales de vibración de un anillo cilíndrico de radio interior r_1=0.4 m y de grosor $r_2 - r_1$=0.4 m, para los valores de ω que satisfacen la ecuación (6.16). Las asíntotas verticales muestran los cortes de frecuencia para los tres primeros modos torsionales de vibración (ξ_p). La asíntota horizontal marca la tendencia de la velocidad de fase a la velocidad de onda β_{dry} como se muestra en la ecuación (7.3).

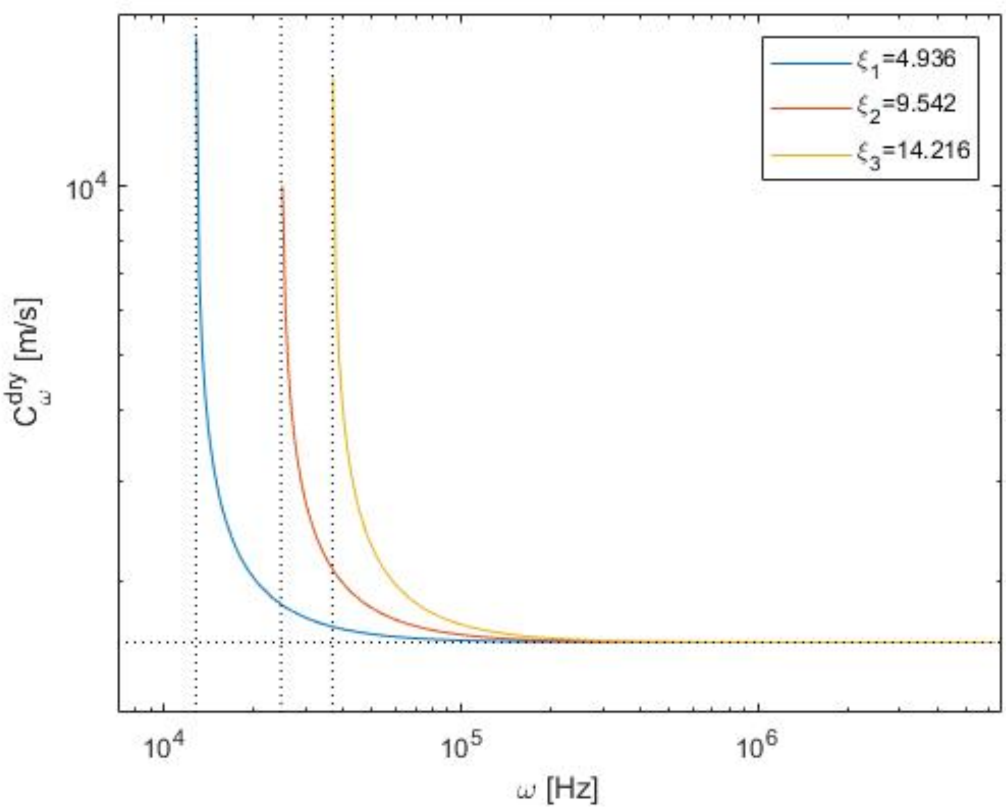

Figura 7.13: Gráfica de la velocidad de fase C_ω^{dry} de los modos torsionales de vibración de un anillo cilíndrico de radio interior r_1=0.6 m y de grosor $r_2 - r_1$=0.4 m, para los valores de ω que satisfacen la ecuación (6.16). Las asíntotas verticales muestran los cortes de frecuencia para los tres primeros modos torsionales de vibración (ξ_p). La asíntota horizontal marca la tendencia de la velocidad de fase a la velocidad de onda β_{dry} como se muestra en la ecuación (7.3).

Como se puede apreciar en las Fig. 7.11, 7.12 y 7.13, el umbral de frecuencia depende del modo torsional de vibración del anillo cilíndrico ξ_p. Con lo obtenido de la ecuación (7.4) se puede observar que entre mayor sea el valor del modo torsional de vibración la frecuencia tendrá un punto de partida mayor, por lo que el rango de frecuencia disminuye de manera directamente proporcional al crecimiento del valor del modo torsional de vibración del anillo cilíndrico ξ_p. También puede apreciarse en la tabla 7.12 que los cortes de frecuencia de los tres anillos cilíndricos con el mismo grosor tienen una separación del mismo tamaño para sus diferentes modos torsionales de vibración.

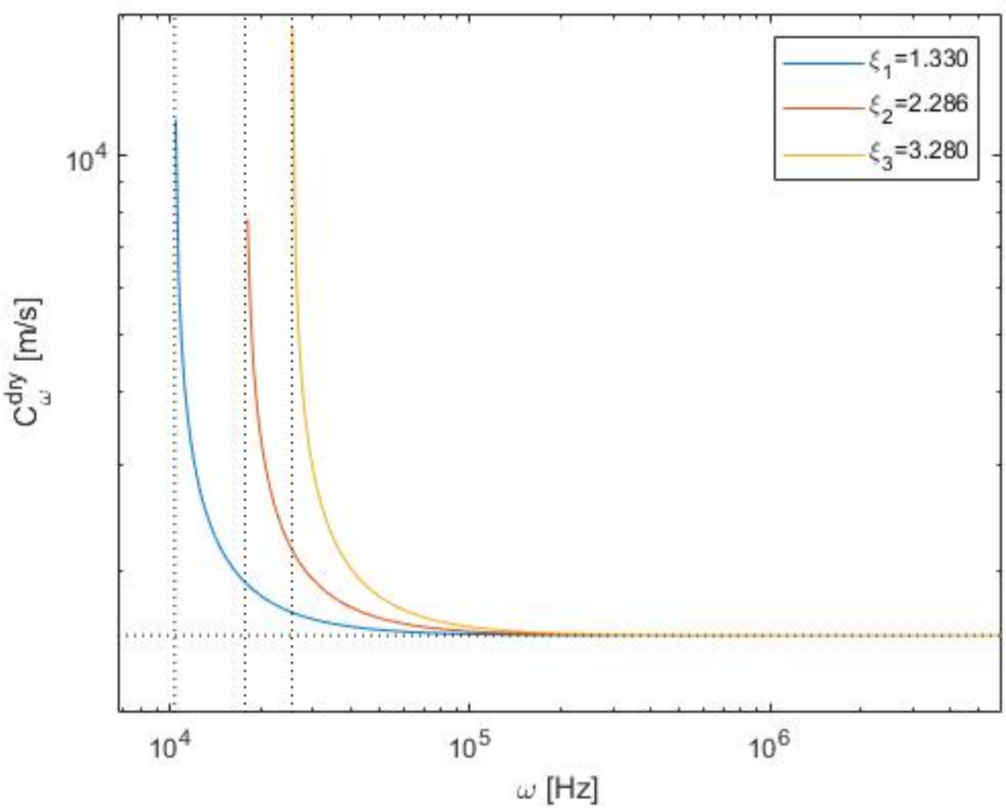

Figura 7.14: Gráfica de la velocidad de fase C_ω^{dry} de los modos torsionales de vibración de un anillo cilíndrico de radio interior r_1=0.2 m y de grosor $r_2 - r_1$=0.6 m, para los valores de ω que satisfacen la ecuación (6.16). Las asíntotas verticales muestran los cortes de frecuencia para los tres primeros modos torsionales de vibración (ξ_p). La asíntota horizontal marca la tendencia de la velocidad de fase a la velocidad de onda β_{dry} como se muestra en la ecuación (7.3).

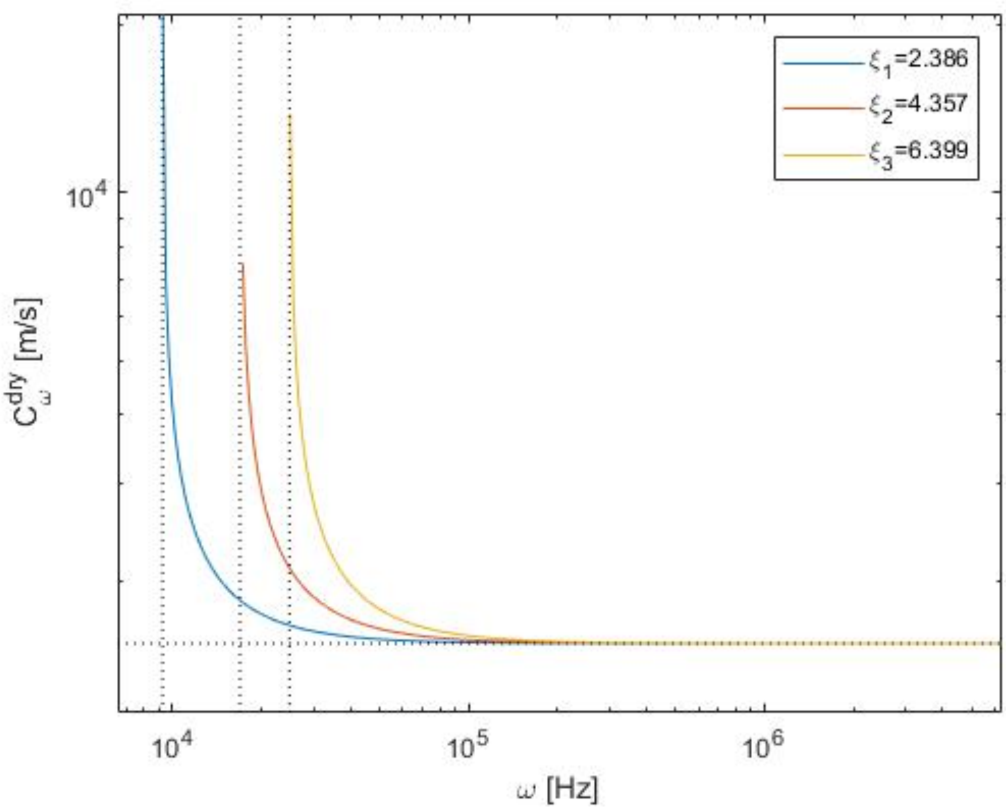

Figura 7.15: Gráfica de la velocidad de fase C_ω^{dry} de los modos torsionales de vibración de un anillo cilíndrico de radio interior r_1=0.4 m y de grosor $r_2 - r_1$=0.6 m, para los valores de ω que satisfacen la ecuación (6.16). Las asíntotas verticales muestran los cortes de frecuencia para los tres primeros modos torsionales de vibración (ξ_p). La asíntota horizontal marca la tendencia de la velocidad de fase a la velocidad de onda β_{dry} como se muestra en la ecuación (7.3).

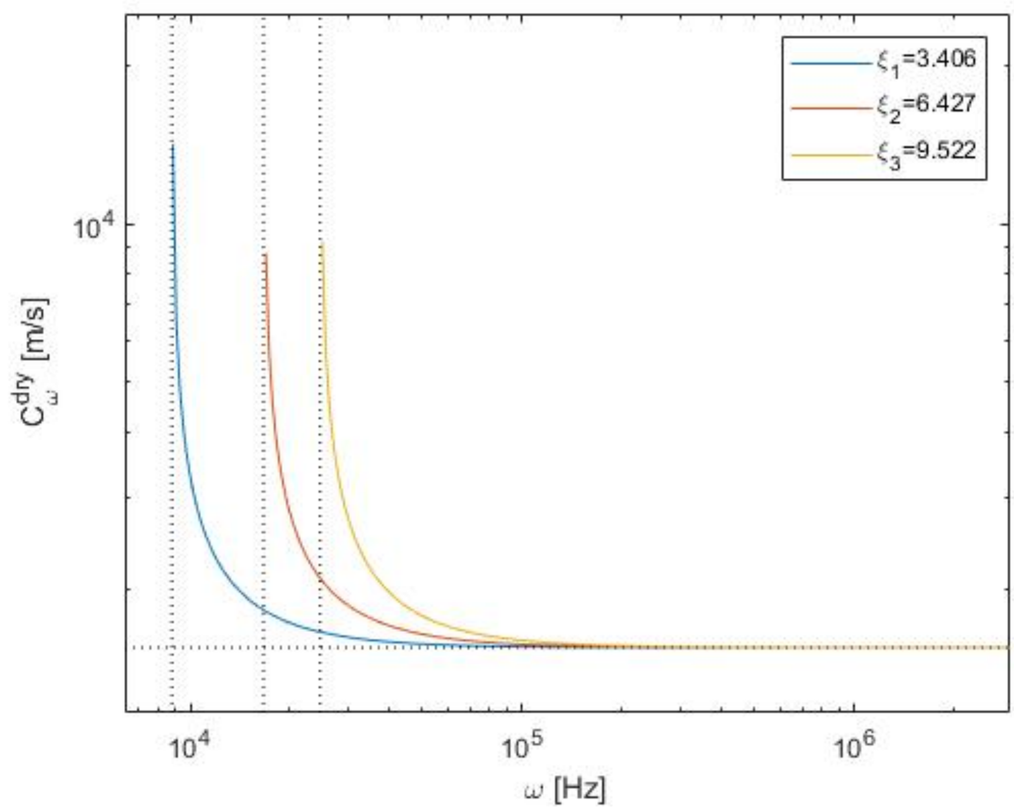

Figura 7.16: Gráfica de la velocidad de fase C_ω^{dry} de los modos torsionales de vibración de un anillo cilíndrico de radio interior r_1=0.6 m y de grosor $r_2 - r_1$=0.6 m, para los valores de ω que satisfacen la ecuación (6.16). Las asíntotas verticales muestran los cortes de frecuencia para los tres primeros modos torsionales de vibración (ξ_p). La asíntota horizontal marca la tendencia de la velocidad de fase a la velocidad de onda β_{dry} como se muestra en la ecuación (7.3).

Como se puede apreciar en las Fig. 7.14, 7.15 y 7.16, el umbral de frecuencia depende del modo torsional de vibración del anillo cilíndrico ξ_p. Con lo obtenido de la ecuación (7.4) se puede observar que entre mayor sea el valor del modo torsional de vibración la frecuencia tendrá un punto de partida mayor, por lo que el rango de frecuencia disminuye de manera directamente proporcional al crecimiento del valor del modo torsional de vibración del anillo cilíndrico ξ_p. También puede apreciarse en la tabla 7.12 que los cortes de frecuencia de los tres anillos cilíndricos con el mismo grosor tienen una separación del mismo tamaño para sus diferentes modos torsionales de vibración.

Capítulo 8

Conclusiones

La función generadora de raíces para las funciones Bessel de primer y segundo tipo de orden n y la función generadora de las raíces del producto cruzado de funciones Bessel de primer y segundo tipo de orden n propuestos en este trabajo de tesis, cumplen con los objetivos planteados en la misma y se le da respuesta a las preguntas de investigación.

Con la función generadora de ceros para las funciones Bessel de primer y segundo tipo de orden n, se logró obtener una forma de calcular de manera analítica las raíces de las funciones Bessel que aparecen en las ecuaciones de frecuencia (1.1) y (1.2). Con este resultado fue posible calcular las velocidades de fase para cilindros poroélasticos, infinitos, con simetría axial, en ausencia de fluidos (caso seco) y enmarcados en la teoría de Biot de viscosidad añadida, y con ello determinar la manera de normalizar los argumentos de las funciones Bessel de primer y segundo tipo.

A partir de la función generadora de ceros para funciones Bessel de primer y segundo tipo de orden n, se obtuvo una función generadora para las raíces del producto cruzado de las mismas como aparecen en las ecuaciones de frecuencia (1.1), (1.2) y (6.7), las cuales fueron normalizadas de la forma de la ecuación (6.10), y a partir de esta expresión se encontraron las raíces que satisfacen las ecuaciones de frecuencias que aparecen en el estudio de los modos torsionales de vibración de anillos cilíndricos huecos poroelásticos, infinitos, con simetría axial, en ausencia de fluidos y enmarcados en la teoría de Biot de viscosidad añadida. En este trabajo de tesis fue posible calcular la velocidad de fase de cada modo torsional de vibración que se presenta en cilindros y anillos cilíndricos secos (o con ausencia de fluido) con un método estandarizado y numéricamente estable, con lo cual se encontró que a mayor grosor del cilindro mayor es el rango de frecuencia permitida para los modos torsionales de vibración, y, por otro lado, que entre mayor es el valor del modo torsional de vibración mayor será el corte de frencuencia a partir del cual este modo torsional de vibración se presenta en el medio, y por tanto menor el rango de frencuencias permitidas para el mismo. Por otro lado, se obtuvo que en los anillos cilíndricos a mayor grosor menor será la separación de los cortes de frecuencia de cada modo torsional de vibración, cumpliendo con el orden de que a mayor sea el modo torsional de vibración menor será el rango de frecuencia permitido para el mismo.

Los resultados obtenidos en esta tesis se enfocan únicamente a los modos torsionales de vibración de cilindros y anillos cilíndricos secos (sin fluido) por lo que en un futuro inmediato esta metodología se puede extender a los modos radiales, longitudinales y flexurales. También se puede aplicar al estudio de cilindros o anillos cilíndricos compuestos secos, cuya aplicabilidad es de gran importancia en el diseño de amortiguadores y pistones.

Bibliografía

[1] M. Abramowitz y I. A. Stegun. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. *Dover*, ninth Dover printing, tenth GPO printing, 1964.

[2] R. Andrews y M. C. Weisenberger. Carbon nanotube polymer composites. *Current Opinion in Solid State and Materials Science*, 8(1), 2004. ISSN 13590286. doi:10.1016/j.cossms.2003.10.006.

[3] G. B. Arfken, H. J. Weber, y F. E. Harris. *Mathematical Methods for Physicists*. 2013. doi:10.1016/C2009-0-30629-7.

[4] R. L. Burden y J. D. Faires. Analisis Numerico. *Grupo Editorial Iberoamericano*, 2002. ISSN 9789706861344.

[5] A. Burke, X. Ding, R. Singh, R. A. Kraft, N. Levi-Polyachenko, M. N. Rylander, C. Szot, C. Buchanan, J. Whitney, J. Fisher, H. C. Hatcher, R. DÁgostino, N. D. Kock, P. M. Ajayan, D. L. Carroll, S. Akman, F. M. Torti, y S. V. Torti. Long-term survival following a single treatment of kidney tumors with multiwalled carbon nanotubes and near-infrared radiation. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 106(31), 2009. ISSN 00278424. doi:10.1073/pnas.0905195106.

[6] L. Colalongo, M. Ghittorelli, F. Torricelli, y Z. M. Kovács-Vajna. Accurate analytical approximation of the OTFTs surface potential by means of the Lagrange Reversion Theorem. 114, 2015. ISSN 00381101. doi:10.1016/j.sse.2015.06.012.

[7] A. De La Zerda, C. Zavaleta, S. Keren, S. Vaithilingam, S. Bodapati, Z. Liu, J. Levi, B. R. Smith, T. J. Ma, O. Oralkan, Z. Cheng, X. Chen, H. Dai, B. T. Khuri-Yakub, y S. S. Gambhir. Carbon nanotubes as photoacoustic molecular imaging agents in living mice. *Nature Nanotechnology*, 3(9), 2008. ISSN 17483395. doi:10.1038/nnano.2008.231.

[8] A. Farshidianfar y P. Oliazadeh. Free vibration analysis of circular cylindrical shells: Comparison of different shell theories. *International Journal of Mechanics and Applications*, 2, 2012. ISSN 2165-9281. doi:10.5923/j.mechanics.20120205.04.

[9] J. Harrison. Fast and accurate Bessel function computation. *Proceedings - Symposium on Computer Arithmetic*, 2009. doi:10.1109/ARITH.2009.32.

[10] A. S. Hoffman. Hydrogels for biomedical applications. *Advanced Drug Delivery Reviews*, 64(SUPPL.), 2012. ISSN 0169409X. doi:10.1016/j.addr.2012.09.010.

[11] N. W. S. Kam, T. C. Jessop, P. A. Wender, y H. Dai. Nanotube molecular transporters: Internalization of carbon nanotube-protein conjugates into mammalian cells. *Journal of the American Chemical Society*, 126(22), 2004. ISSN 00027863. doi:10.1021/ja0486059.

[12] F. Kong, F. Liu, W. Li, X. Guo, Z. Wang, H. Zhang, Q. Li, L. Luo, Y. Du, Y. Jin, y J. You. Smart Carbon Nanotubes with Laser-Controlled Behavior in Gene Delivery and Therapy through a Non-Digestive Trafficking Pathway. *Small*, 12(48), 2016. ISSN 16136829. doi:10.1002/smll.201601092.

[13] V. Lovat, D. Pantarotto, L. Lagostena, B. Cacciari, M. Grandolfo, M. Righi, G. Spalluto, M. Prato, y L. Ballerini. Carbon nanotube substrates boost neuronal electrical signaling. *Nano Letters*, 5(6), 2005. ISSN 15306984. doi:10.1021/nl050637m.

[14] J. McMahon. On the roots of the Bessel and certain related functions. *The Annals of Mathematics*, 9, 1894. ISSN 0003486X. doi:10.2307/1967501.

[15] I. Ojeda, M. Barrejón, L. M. Arellano, A. González-Cortés, P. Yáñez-Sedeño, F. Langa, y J. M. Pingarrón. Grafted-double walled carbon nanotubes as electrochemical platforms for immobilization of antibodies using a metallic-complex chelating polymer: Application to the determination of adiponectin cytokine in serum. *Biosensors and Bioelectronics*, 74, 2015. ISSN 18734235. doi:10.1016/j.bios.2015.06.001.

[16] N. Punbusayakul, S. Talapatra, P. M. Ajayan, y W. Surareungchai. Label-free as-grown double wall carbon nanotubes bundles for Salmonella typhimurium immunoassay. *Chemistry Central Journal*, 7(1), 2013. ISSN 1752153X. doi:10.1186/1752-153X-7-102.

[17] M. Roldo y D. G. Fatouros. Biomedical applications of carbon nanotubes. *Royal Society of Chemistry*, 109:10–35, 2013. ISSN 02601826. doi:10.1039/c3pc90010j.

[18] S. R. Shin, H. Bae, J. M. Cha, J. Y. Mun, Y. C. Chen, H. Tekin, H. Shin, S. Farshchi, M. R. Dokmeci, S. Tang, y A. Khademhosseini. Carbon nanotube reinforced hybrid microgels as scaffold materials for cell encapsulation. *ACS Nano*, 6(1), 2012. ISSN 19360851. doi:10.1021/nn203711s.

[19] J. Simon, E. Flahaut, y M. Golzio. Overview of carbon nanotubes for biomedical applications. *Materials*, 12(4), 2019. ISSN 19961944. doi:10.3390/ma12040624.

[20] S. Solorza y P. N. Sahay. Standing torsional waves in a fully saturated, porous, circular cylinder. *Geophysical Journal International*, 157, 2004. ISSN 0956540X. doi:10.1111/j.1365-246X.2004.02198.x.

[21] S. Solorza y P. N. Sahay. On extensional waves in a poroelastic cylinder within the framework of viscosity-extended biot theory: The case of traction-free open-pore cylindrical surface. *Geophysical Journal International*, 2009. ISSN 0956540X. doi:10.1111/j.1365-246X.2009.04366.x.

[22] S. Solorza-Calderón. Torsional waves of infinite fully saturated poroelastic cylinders within the framework of Biot viscosity-extended theory. *Applied Mathematics and Computation*, 2021. ISSN 00963003. doi:10.1016/j.amc.2020.125636.

[23] E. W. Swokowski. Cálculo Con Geometría Analítica. *Iberoamerica*, 1(4):1110, 1998.

[24] M. Tajuddin y S. Ahmed Shah. On torsional vibrations of infinite hollow poroelastic cylinders. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2007. ISSN 15593959. doi:10.2140/jomms.2007.2.189.

[25] L. Thomsen. Biot-consistent elastic moduli of porous rocks: low-frequency limit. *Geophysics*, 50, 1985. ISSN 00168033. doi:10.1190/1.1441900.

[26] Y. Tiejun, L. Wen, y D. Lu. *Advances in Vibration Engineering and Structural Dynamics*. ISSN 978-953-51-0845-0. doi:10.5772/51816.

[27] A. Vashist, A. Kaushik, A. Vashist, V. Sagar, A. Ghosal, Y. K. Gupta, S. Ahmad, y M. Nair. Advances in Carbon Nanotubes–Hydrogel Hybrids in Nanomedicine for Therapeutics. *Advanced Healthcare Materials*, 7(9), 2018. ISSN 21922659. doi:10.1002/adhm.201701213.

[28] J. Verdugo-Olachea, S. Solorza-Calderón, A. González-Fernández, y J. D. De Basabe. On torsional vibrations of axial-symmetric infinite hollow poroelastic cylinders. *Archive of Applied Mechanics*, 2022. ISSN 14320681. doi:10.1007/s00419-022-02126-0.

[29] G. N. Watson. A treatise on the theory of Bessel functions. *Cambidge University Press*, (2da edición), 1966.

[30] K. Welsher, Z. Liu, S. P. Sherlock, J. T. Robinson, Z. Chen, D. Daranciang, y H. Dai. A route to brightly fluorescent carbon nanotubes for near-infrared imaging in mice. *Nature Nanotechnology*, 4(11), 2009. ISSN 17483395. doi: 10.1038/nnano.2009.294.

[31] K. Welsher, S. P. Sherlock, y H. Dai. Deep-tissue anatomical imaging of mice using carbon nanotube fluorophores in the second near-infrared window. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 108(22), 2011. ISSN 00278424. doi:10.1073/pnas.1014501108.

[32] L. Xu, L. Feng, S. Dong, J. Hao, y Q. Yu. Carbon nanotubes modified by a paramagnetic cationic surfactant for migration of DNA and proteins. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 559, 2018. ISSN 18734359. doi:10.1016/j.colsurfa.2018.09.032.