Matemáticas y sus aplicaciones 15

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Editores

Primera edición: 2020

ISBN: 978-607-525-696-2

DR © Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
4 Sur 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000
Teléfono: 01 (222) 2 29 55 00
www.buap.mx

Dirección General de Publicaciones
2 Norte 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000
Teléfonos: 01 (222) 246 85 59 y 01 (222) 229 55 00 ext. 5768 y 5764
www.dgp.buap.mx

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Av. San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel, Edificio FM1-101B
Ciudad Universitaria, Puebla, Pue. México. CP. 72570
Teléfonos: 01 (222) 229 55 00 ext. 7552
www.fcfm.buap.mx

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA • *Rector*: José Alfonso Esparza Ortiz • *Secretario General*: José Jaime Vázquez López • *Vicerrector de Extensión y Difusión de la Cultura*: José Carlos Bernal Suárez • *Director General de Publicaciones*: Hugo Vargas Comsille • *Directora de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas*: Martha Alicia Palomino Ovando

Hecho en México
Made in Mexico

Matemáticas y sus aplicaciones 15

Selección bajo arbitraje riguroso de algunos proyectos de investigación presentados en el
International Conference on Mathematics and its Applications (CIMA), FCFM, BUAP.

Editores

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco

Comité científico internacional

Ermínia de Lourdes Campello Fanti (UNESP, BRA), Hugo Adán Cruz Suárez (BUAP), Luis Miguel de la Cruz Salas (UNAM), Antonio Díaz Ramos (UMA, ESP), Sina Greenwood (UA,NZ), Gerardo Hernández Valdez (BUAP), Miguel Antonio Jiménez Pozo (BUAP), Judy Kennedy (LU, USA), Christian Lehn (TUC, DE), Antonio de Jesús Libreros López (BUAP), Edgar Martínez Moro (UVA, ESP), Fernando Macías Romero (BUAP), Daria Michalik (UKSW, PL), Nayeli Berenice Quiñones Baldazo (BUAP), Abigail Rodríguez Nava (UAM), José Gregorio Rodríguez Nieto (UNC, CO), Saúl Alonso Zavala Ortiz (I.T. Ensenada).

Contenido

Presentación 1

Análisis Matemático

Capítulo 1. On Sobolev-type perturbations of classical orthogonal polynomials 5

Luis Enrique Garza Gaona

Capítulo 2. Reconocimiento de patrones en imágenes digitales usando máscaras de Hilbert 29

Diego Francisco Alcaraz Ubach, Selene Solorza Calderón

Educación matemática

Capítulo 3. Comprensión del concepto de límite de una función en estudiantes de Actuaría, Física y Matemáticas 51

América Guadalupe Analco Panohaya, Lidia Aurora Hernández Rebollar

Capítulo 4. Recurso educativo abierto para la construcción de diferentes significados asociados al volumen de cuerpos geométricos 75

Alma Rosa Argüelles Ortiz y Sergio Andrés Rubio-Pizzorno

Probabilidad

Capítulo 5. Determinación del spread asociado a deuda corporativa con el modelo de difusión con saltos de Merton 103
José Antonio Climent Hernández, Luz Marina Hernández Bautista, Ambrosio Ortiz Ramírez

Capítulo 6. Procesos max-stable en el espacio-tiempo 129
Alejandro Iván Aguirre Salado, José del Carmen Jiménez Hernández, Marisol López Cerino

Topología

Capítulo 7. La clase de las gráficas finitas es SF_n-cerrada 147
David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Germán Montero Rodríguez

Índice de autores 169

Matemáticas y sus aplicaciones 15, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-525-696-2

Capítulo 2

Reconocimiento de patrones en imágenes digitales usando máscaras de Hilbert

Diego Francisco Alcaraz Ubach*, Selene Solorza Calderón**

***FCFM, BUAP**
****Facultad de Ciencias, UABC**

Resumen

El reconocimiento de patrones en imágenes digitales es un campo de investigación relevante para distintas áreas de las ciencias. Existen sistemas de reconocimiento de patrones que ayudan a automatizar la clasificación de objetos mediante imágenes capturadas, donde en algunos casos el tamaño o escala de los objetos a estudiar no varía, como puede ocurrir con su posición u orientación. En este trabajo se desarrolla un sistema de reconocimiento de patrones en imágenes digitales invariante por posición y rotación, fundamentado en la teoría de la transformada de Fourier y de la transformada de Hilbert. Para esto, se generan dos máscaras binarias de anillos concéntricos que surgen del estudio de la transformada de Hilbert radial, las cuales son la base para que el sistema de reconocimiento de patrones en imágenes digitales sea invariante por rotación. La invarianza de la posición resulta de la aplicación de la transformada de Fourier.

1 Introducción

El reconocimiento de patrones es un área de interés en los sectores social y económico, en distintos campos de la ciencia y en el desarrollo de tecnologías, por citar sólo algunos ejemplos. Desarrollar nuevas aplicaciones, algoritmos y técnicas más eficientes, y mejores tecnologías, es una tarea multidiciplinaria donde participan ingenieros, físicos y matemáticos, entre otros.

Las aplicaciones del reconocimiento de patrones se pueden clasificar en los grupos siguientes: comunicación entre las computadoras y el hombre, biomedicina, física, aspectos de seguridad, estudio y estimación de recursos naturales, estereología, industria y robótica e inteligencia artificial [15]. La mayoría de las aplicaciones del reconocimiento de patrones, correspondientes a los grupos mencionados, están basadas en herramientas que surgen del estudio de distintas ramas de las matemáticas. En particular, el reconocimiento de patrones en imágenes digitales se sustenta, en gran medida, en conceptos y resultados del análisis funcional. Además, las teorías de la estadística paramétrica juegan un papel esencial para dar validez a las aplicaciones desarrolladas en esta área.

En este capítulo se presenta un sistema digital de reconocimiento de patrones en imágenes digitales invariante por posición y rotación, basado en el estudio de las transformadas de Fourier y de Hilbert, el cual fue desarrollado en [1] por los autores del trabajo presente. La transformada de Fourier ha sido ampliamente estudiada y aplicada en el campo del reconocimiento de patrones en imágenes digitales, a diferencia de la transformada de Hilbert, cuyas principales aplicaciones son en el área de procesamiento de señales unidimensionales.

Una ventaja de la transformada de Fourier, es que las aplicaciones de ésta para funciones de una variable se extienden de manera natural para funciones multivariables. Desafortunadamente, la transformada de Hilbert no tiene esa ventaja; al calcular la transformada de Hilbert de señales bidimensionales (por ejemplo imágenes) no se obtienen los mismos resultados que para señales unidimensionales. Por ello, se han propuesto modificaciones a la transformada de Hilbert con el objetivo de extender las aplicaciones de una a dos dimensiones. Entre dichas propuestas, se encuentra la *transformada de Hilbert radial* [13, 5], a partir de la cual se elaboraron dos máscaras binarias de anillos concéntricos para lograr la invariancia por rotación, a las cuales se les denoninó *máscaras de Hilbert*.

2 Fundamentos

Una imagen digital se puede definir como una señal bidimensional discreta y finita $I[n_1, n_2]$, con $n_1 = 0, 1, ..., M-1$ y $n_2 = 0, 1, ..., N-1$, donde la amplitud de I en cualquier coordenada (n_1, n_2) representa la intensidad de la imagen en

ese punto. A un punto (n_1, n_2) se le denomina píxel de la imagen. En el sistema digital de reconocimiento de patrones en imágenes digitales desarrollado en este trabajo, se consideró únicamente imágenes en *escala de grises*. Este término se usa para referirse a la intensidad de imágenes monocromáticas. En dicha representación, la intensidad de cada punto en la imagen es un tono de gris que va desde el color negro hasta el blanco [8].

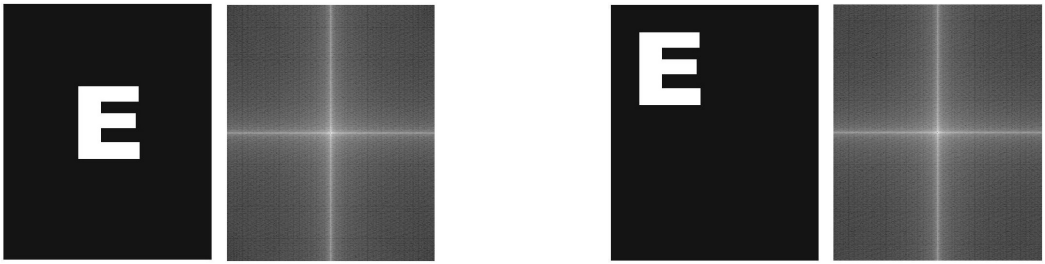
En el contexto del procesamiento de señales en general, existen diversas razones para considerar la transformada de Fourier de señales. Por ejemplo, representar la información de una señal en el dominio de frecuencias es útil para aplicar algunos algoritmos y de determinar ciertas propiedades de la señal. Sin embargo, calcular la transformada de Fourier de una señal discreta $f[n]$ con $n = 0, 1, ..., N-1$ de la forma habitual, requiere de $O(N^2)$ operaciones [3]. Debido a las limitaciones computacionales que implica tal número de operaciones, comúnmente se utiliza un algoritmo desarrollado por Cooley y Tukey denominado *transformada rápida de Fourier* [4]. Con este algoritmo, se obtiene el mismo resultado que utilizar la transformada de Fourier realizando únicamente $O(Nlog(N))$ operaciones aritméticas.

Para una imagen digital $I[n_1, n_2]$ representada en escala de grises, se cumple lo siguiente

$$|\mathcal{F}_F[I[n_1, n_2]]| = |\mathcal{F}_F[I[n_1 - a, n_2 - b]]|, \tag{1}$$

para $a, b \in \mathbb{N}$ [3], donde $\mathcal{F}_F$ denota la transformada rápida de Fourier. Es decir, el módulo de la transformada de Fourier, conocido también como espectro de amplitud de Fourier, es invariante por traslación.

Con base en esta propiedad de la transformada de Fourier, es posible elaborar un sistema de reconocimiento de patrones en imágenes digitales invariante por posición, es decir, un sistema que sea capaz de identificar un objeto en una imagen trasladado en cualquier dirección. Por ejemplo, en la Figura 1 se muestra el espectro de amplitud de Fourier de dos imágenes con el mismo objeto pero en diferentes posiciones.



(a) Imagen (b) $|\mathcal{F}_F(I)|$ (c) Imagen J (d) $|\mathcal{F}_F(J)|$

Figura 1: Ejemplificación de la invariancia por posición del módulo de la transformada de Fourier de una imagen. Ambos espectros de amplitud se muestran bajo una transformación logarítmica por cuestiones de visualización.

Es común que el módulo de la transformada de Fourier de una imagen tenga valores de intensidad entre 0 y 10^6. Debido a esto, al visualizar dicho espectro se pierden detalles correspondientes a los valores de intensidad menores, por lo que generalmente se visualiza bajo una transformación logarítmica [8].

El filtrado de imágenes digitales es una técnica muy utilizada en el procesamiento de imágenes digitales. Existen filtros para resaltar o suavizar bordes en imágenes, remover distintos tipos de ruido, entre otros. En el área de reconocimiento de patrones, se pueden utilizar filtros en imágenes digitales con el fin de obtener ciertas características que permitan hacer una clasificación o identificación entre imágenes. A los filtros utilizados en imágenes digitales, también se les conoce como máscaras.

Una forma de aplicar un filtro a una imagen $I[n_1, n_2]$ es mediante la convolución. Este procedimiento se conoce como filtrado espacial cuando las operaciones se llevan a cabo en cada píxel $[n_1, n_2]$ de la imagen I y como filtrado en frecuencia cuando se trabaja en el dominio de la transformada de Fourier de I [8].

El filtrado en frecuencia está fundamentado por el teorema de convolución. La convolución entre dos imágenes en el dominio de frecuencias es una multiplicación punto a punto de matrices o *producto Hadamard*. De esto, el filtrado en frecuencia de una imagen $I[n_1, n_2]$ se define como $W[k_1, k_2] \odot |I_F[k_1, k_2]|$, donde $I_F[k_1, k_2]$ es la transformada rápida de Fourier de I, $W[k_1, k_2]$ es el

filtro a utilizar y el símbolo $\odot$ denota la multiplicación punto a punto.

La imagen filtrada, se obtiene tomando la transformada inversa rápida de Fourier, es decir,

$$\hat{I}[n_1, n_2] = \mathcal{F}_F^{-1}\left\{\hat{\mathcal{F}}_F[I[n_1, n_2]]\right\}, \tag{2}$$

donde $\hat{\mathcal{F}}_F[I[n_1, n_2]]$ es la imagen resultante de aplicar el filtro W en el dominio de frecuencias.

En el área de reconocimiento de patrones en imágenes digitales, no siempre es necesario obtener la imagen $\hat{I}[n_1, n_2]$ de la ecuación (2), basta con trabajar con el módulo de la transformada de Fourier de $\hat{\mathcal{F}}_F[I[n_1, n_2]]$ (también conocido como espectro de amplitud de Fourier) para obtener la clasificación o identificación.

3 Transformada de Hilbert

La transformada de Hilbert de una función $f(x)$ de variable real se define como sigue:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}[f(x)] &= f(x) * \frac{1}{\pi x} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)}{x-s} ds.\end{aligned} \tag{3}$$

Como el integrando de (3) tiene una singularidad en $s = x$, se toma el valor principal de Cauchy, denotado por P, mediante el cual se permite asignar valores a integrales impropias. Para esta ecuación integral, el valor principal de Cauchy se representa por

$$\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)}{x-s} ds = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \left[\int_{-\infty}^{x-\epsilon} \frac{f(s)}{x-s} ds + \int_{x+\epsilon}^{\infty} \frac{f(s)}{x-s} ds\right]. \tag{4}$$

La ecuación 3 surge de considerar una función $f(z) = u(x, 0) + iv(x, 0)$ analítica en la mitad superior del plano complejo que además tiende a cero en el infinito. Con esto, se llega a lo siguiente:

$$u(x_0) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x)}{x_0 - x} dx, \tag{5}$$

y

$$v(x_0) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x)}{x_0 - x} dx. \tag{6}$$

Las ecuaciones (5) y (6), indican que conociendo únicamente la parte real de una función analítica f sobre la recta real, es posible encontrar su armónica conjugada y viceversa. Véase [9].

En la mayoría de las aplicaciones, la transformada de Hilbert se aplica en el espacio de frecuencias. De la ecuación (3) y por el teorema de convolución,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\mathcal{H}[f(x)]\} &= \mathcal{F}\left[f(x) * \frac{1}{\pi x}\right] \\ &= \mathcal{F}\left[f(x)\right] \mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi x}\right]. \end{aligned} \tag{7}$$

La transformada de Fourier de la función sgn (la función signo) es $\mathcal{F}[sgn\,(x)] = -\frac{i}{\pi\nu}$, y por la propiedad de simetría de la transformada de Fourier se tiene que $\mathcal{F}\left[-\frac{i}{\pi x}\right] = sgn(-\nu)$. Además, como el operador $\mathcal{F}$ es lineal, se llega a

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi x}\right] = -isgn(\nu) \tag{8}$$

De esto, la transformada de Fourier de la transformada de Hilbert de una función $f(x)$ se expresa como

$$\mathcal{F}\{\mathcal{H}[f(x)]\} = -isgn(\nu)F(\nu), \tag{9}$$

donde $F(\nu)$ es la transformada de Fourier de $f(x)$.

Al expresar $F(\nu)$ en términos de su amplitud y fase, la ecuación (9) se escribe como

$$\mathcal{F}\{\mathcal{H}[f(x)]\} = -isgn(\nu)\left|F(\nu)\right| e^{i\theta}. \tag{10}$$

Si $\nu < 0$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\mathcal{H}[f(x)]\} &= i\left|F(\nu)\right| e^{i\theta} \\ &= e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}\left|F(\nu)\right|. \end{aligned} \tag{11}$$

Y si $\nu > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\mathcal{H}[f(x)]\} &= -i\left|F(\nu)\right| e^{i\theta} \\ &= e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}\left|F(\nu)\right|. \end{aligned} \tag{12}$$

Por lo tanto, la transformada de Fourier de $\mathcal{H}[f(x)]$ se interpreta como la transformada de Fourier de la función $f(x)$ con su espectro fase de Fourier rotado $\pm\frac{\pi}{2}$.

La transformada de Fourier de la transformada de Hilbert de una función de dos variables, $f(x_2, x_2)$, es:

$$\mathcal{F}\{\mathcal{H}[f(x_1, x_2)]\} = -sgn(\nu_1)sgn(\nu_2)F(\nu_1, \nu_2). \tag{13}$$

En el área de procesamiento de señales, para el caso de señales con una sola variable independiente, la transformada de Hilbert tiene diversas aplicaciones, las cuales se basan principalmente en la construcción de una señal compleja denominada *señal analítica*.

A partir de una señal real $u(x)$, es posible construir una señal compleja $f(x)$, con el fin de extraer ciertas características de $u(x)$, como la amplitud local y la fase local. En 1946, Gabor propuso utilizar la transformada de Hilbert de $u(x)$ para construir dicha señal compleja [7], llamándola señal analítica:

$$f(x) = u(x) + i\mathcal{H}[u(x)]. \tag{14}$$

Al representar una señal analítica $f(x)$ en forma polar,

$$f(x) = A(x)e^{i\theta(x)}, \tag{15}$$

se obtiene la amplitud local $A(x)$ y la fase local $\theta(x)$ de la señal $u(x)$, donde

$$A(x) = \sqrt{u(x)^2 + \mathcal{H}[u(x)]^2}, \quad \theta(x) = \arctan\frac{\mathcal{H}[u(x)]}{u(x)}. \tag{16}$$

La transformada de Fourier de una señal analítica $f(x) = u(x) + i\mathcal{H}[u(x)]$, está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x)] &= \mathcal{F}\left\{u(x) + i\mathcal{H}[u(x)]\right\} \\ &= U(\nu) + i[-isgn(\nu)U(\nu)] \\ &= U(\nu)[1 + sgn(\nu)], \end{aligned} \tag{17}$$

donde $U(\nu)$ es la transformada de Fourier de la señal u. De la ecuación (17), se obtiene que

$$F(\nu) = \begin{cases} 2U(\nu), & \text{si } \nu > 0, \\ U(0), & \text{si } \nu = 0, \\ 0, & si\ \nu < 0. \end{cases} \tag{18}$$

La definición de la transformada de Hilbert de una función, se puede generalizar directamente al caso de varias variables, sin embargo, con esta generalización no es posible construir una señal compleja de dos variables que tenga las mismas características que la señal analítica. Pese a esto, en los trabajos de Felsberg y Sommer [6], Larkin y colaboradores [10] y Lorenzo [11], por mencionar algunos, se presentan diferentes propuestas de construcción de una señal bidimensional compleja para obtener características como la amplitud y la fase local de una señal, o bien, para demodular señales bidimensionales.

Aunque las principales aplicaciones de la transformada de Hilbert en dimensión uno se basan en la construcción de la señal analítica a partir de una señal real, también se puede utilizar para la detección de bordes de señales. Es natural intentar sacar provecho de estas propiedades o atributos que cumple la transformada de Hilbert en dimensión uno para funciones de dos variables, pero en general, no se obtienen resultados análogos.

Se han propuesto diferentes transformadas para extender a dimensión dos las principales aplicaciones de la transformada de Hilbert. En algunos casos, se utiliza la transformada de Hilbert unidimensional para detectar bordes de alguna función $f(x_1, x_2)$ en dos direcciones, es decir, calcular $\mathcal{H}[f(x_1)]$ y $\mathcal{H}[f(x_2)]$; sin embargo, sólo funciona para detectar bordes en esas direcciones.

Davis y colaboradores [5], definen una transformada de Hilbert que permite el realce o la detección de bordes para funciones o señales bidimensionales sin las limitaciones antes mencionadas, la cual denominan *transformada de Hilbert radial*. La idea de esta propuesta, es utilizar la función $e^{iP\theta}$ en lugar de $sgn(\nu_1)sgn(\nu_2)$ en la ecuación (13), lo que da lugar a la definición de la transformada radial de Hilbert:

$$\mathcal{F}\{\mathcal{H}_R[f(x_1, x_2)]\} = e^{iP\theta} F(\nu_1, \nu_2), \tag{19}$$

donde $\theta = \arccos\left(\frac{\nu_1}{r}\right)$ con $r = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$ para $(\nu_1, \nu_2) \neq (0, 0)$ y $\theta = 0$ en el origen, $F(\nu_1, \nu_2)$ es la transformada de Fourier de la función f y P es cualquier número entero.

Pei y Ding [13], proponen una generalización de la transformada de Hilbert radial dada por Davis y colaboradores [5], la cual denominan *transformada de Hilbert radial generalizada* y la definen por

$$\mathcal{F}\left\{\mathcal{H}_{RG}[f(x_1,x_2)]\right\} = \Phi(\theta)F(\nu_1,\nu_2), \tag{20}$$

donde $\Phi(\theta)$ es cualquier función. En el caso particular en que $\Phi(\theta) = e^{iP\theta}$ con $\theta = \arccos\left(\frac{\nu_1}{r}\right)$ y $r = \sqrt{\nu_1^2+\nu_2^2}$, se obtiene la ecuación (19).

Para una función discreta $f[n_1,n_2]$ donde $n_1 = 0,1,...,M-1$ y $n_2 = 0,1,...,N-1$, la ecuación (20) se modifica a

$$\mathcal{F}\left\{\mathcal{H}_{RGd}[f[n_1,n_2]]\right\} = \Phi[\theta]F[k_1,k_2], \tag{21}$$

donde $F[k_1,k_2]$ representa la transformada discreta de Fourier de $f[n_1,n_2]$, con $k_1 = 0,1,...,M-1$ y $k_2 = 0,1,...,N-1$.

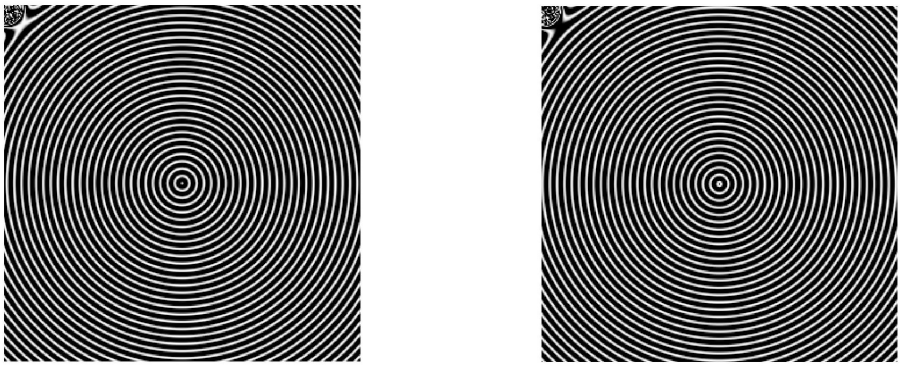
4 Sistema de reconocimiento de patrones invariante por posición y rotación

Como ya se mencionó, al trabajar con el espectro de amplitud de Fourier de las imágenes digitales, se obtiene directamente un sistema de reconocimiento de patrones que es invariante por posición. El invariante por rotación no es directo, para lograrlo se construyeron máscaras binarias de anillos concéntricos, con las cuales se calculan firmas unidimensionales que son invariantes por traslación y rotación.

Partiendo de la versión discreta de la transformada de Hilbert radial generalizada (20), se propone que

$$\Phi[\theta] = e^{ir\theta}, \tag{22}$$

con $\theta = \cos\frac{k_1}{r^2}$ y $r = \sqrt{k_1^2+k_2^2}$ para $(k_1,k_2) \neq (0,0)$, y $\theta = 0$ en $(k_1,k_2) = (0,0)$, donde k_1 y k_2 representan las variables discretas en el plano de frecuencias. Como la función $\Phi[\theta]$ toma valores complejos en el espacio de frecuencias, se puede expresar como una función $H[k_1,k_2] = Re[H] + iIm[H]$. Las funciones $Re[H]$ e $Im[H]$, correspondientes a la parte real e imaginaria de $H[k_1,k_2]$, se muestran en la figura 2 vistas sobre el plano (k_1,k_2), las cuales se pueden representar como imágenes digitales en escala de grises.

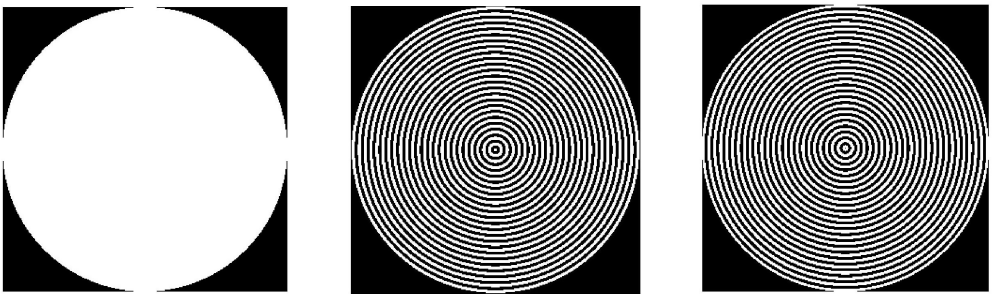


(a) $Re(H)$ (b) $Im(H)$

Figura 2: Parte real y parte imaginaria de $H[k_1, k_2]$.

Al filtrar en frecuencia las imágenes $Re(H)$ e $Im(H)$ con un disco binario D, se generan las máscaras H_R y H_I (Figura 3), es decir,

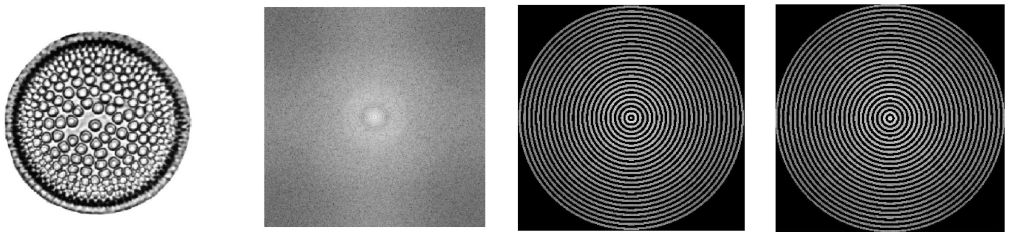
$$\begin{aligned} H_R &= Re(H) \odot D, \\ H_I &= Im(H) \odot D. \end{aligned} \tag{23}$$



(a) Disco binario D (b) Máscara H_R (c) Máscara H_I

Figura 3: Mascaras de Hilbert

Para obtener las firmas invariantes por traslación y rotación, se filtra el módulo de la transformada rápida de Fourier de la imagen con las máscaras H_R y H_I. En la Figura 4, se muestra un ejemplo de dicho proceso.



(a) Imagen I (b) Módulo de $\mathcal{F}_F(I)$ (c) Módulo de $\mathcal{F}_F(I)$ filtrado con H_R (d) Módulo de $\mathcal{F}_F(I)$ filtrado con H_I

Figura 4: Filtros H_R y H_I actuando sobre el espectro de amplitud de Fourier de la imagen. Por cuestiones de visualización, las imágenes de los espectros de amplitud se muestran bajo una transformación logarítmica.

En la Figura 4 se observa que el resultado de filtrar $|\mathcal{F}_F[I]|$ con H_R y H_I, genera en ambos casos una imagen con anillos de color negro (que representa al valor de intensidad 0) y anillos de distintos tonos de grises (valores de intensidad diferentes de cero).

Para cada imagen se obtienen dos arreglos de números f_R y f_I, denominados *firmas de la imagen*. La primera se determina a partir del espectro de amplitud de Fourier de la imagen filtrada por H_R, y la otra utilizando el filtro H_I.

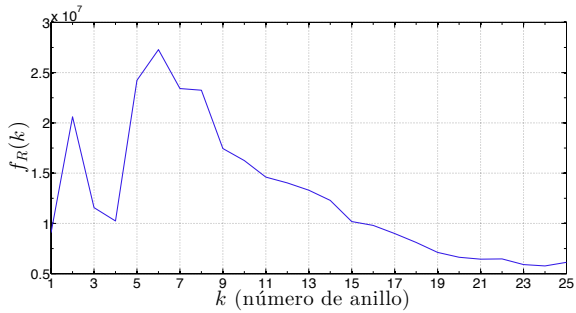
Para una imagen dada I, la firma f_R es

$$f_R = [s_1, s_2, ..., s_N], \tag{24}$$

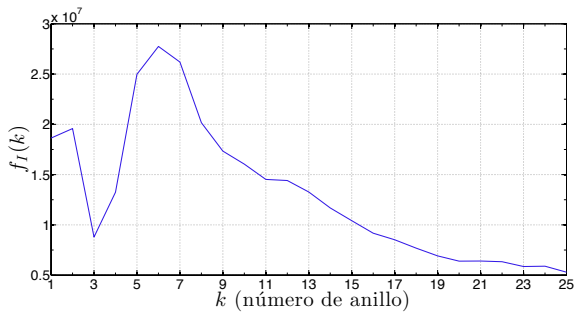
donde s_k es la suma de las intensidades de los píxeles del k-ésimo anillo (sin considerar los anillos en negro y numerados en orden ascendente del centro hacia afuera) en la imagen $|\mathcal{F}_F[I]| \odot H_R$, y N es el número de dichos anillos en la imagen (Figura 4). Análogamente, se determinó la firma

$$f_I = [\hat{s}_1, \hat{s}_2, ..., \hat{s}_M], \tag{25}$$

correspondiente a la imagen $|\mathcal{F}_F[I]| \odot H_I$. En la Figura 5, se muestran las firmas de la imagen (a) de la Figura 4.



(a) Firma f_R



(b) Firma f_I

Figura 5: Firmas correspondientes a la imagen I de la figura 4 a).

5 Plano de clasificación y nivel de confianza del sistema de reconocimiento de patrones

El sistema de reconocimiento de patrones se tiene que entrenar con una base de datos de imágenes de referencia. En la Figura 6, se muestra una base de datos formada por imágenes digitales en escala de grises de fósiles de diatomeas. Las diatomeas son una de las fuentes básicas para la formación de materia orgánica en el océano y participan activamente en la sedimentación. La presencia de diatomeas en paleoambientes marinos ha sido utilizada para el estudio de cambios climáticos y de procesos geomorfológicos [2].

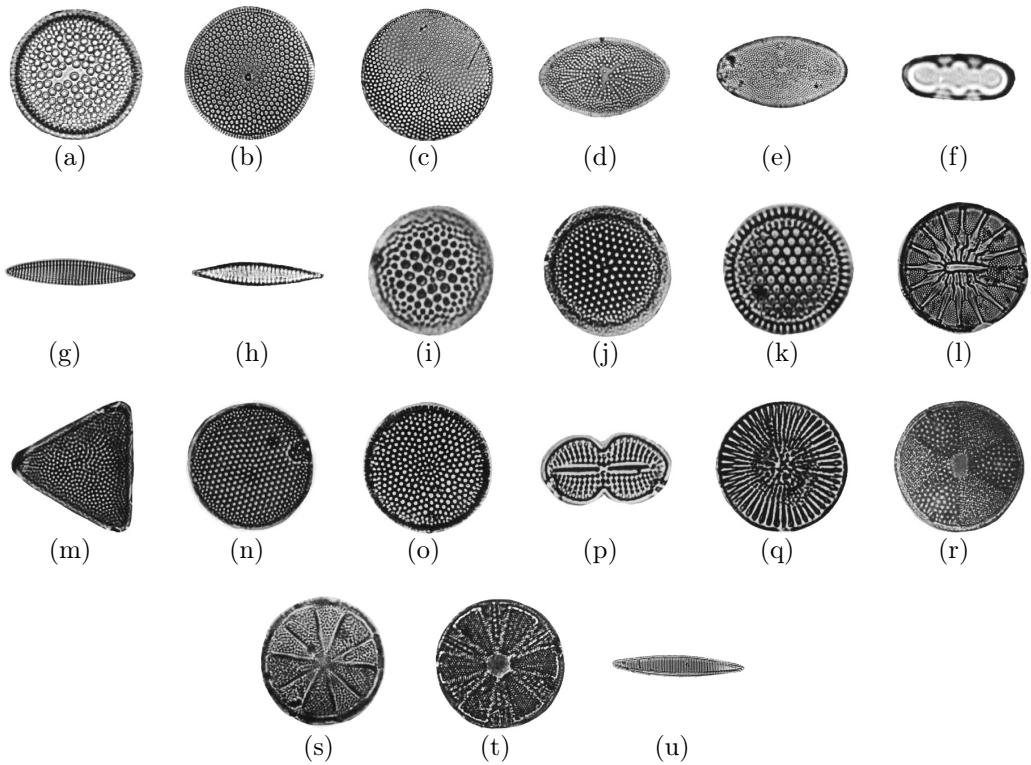


Figura 6: Base de datos de imágenes de referencia: fósiles de diatomeas. (a) A: *Actinocyclus ingens - Rattray.* (b) B: *Azpeitia sp.* (c) C: *Azpeitia nodulifera - (Schmidth) Fryxell et Sims.* (d) D: *Actinocyclus ellipticus - Grunow in van Heurck.* (e) E: *Actinocyclus ellipticus var moronensis - (Deby ex Rattray) Kolbe.* (f) F: *Denticulopsis praedimorpha - Barron ex Akiba.* (g) G: *Nitzchia praereinholdii - Schrader.* (h) H: *Bogorovia praepaleacea - (Schrader) Jouse.* (i) I: *Thalassiosira oestruppii var 1.* (j) J: *Thalassiosira oestruppii var 2.* (k) K: *Thalassiosira domifacta - (Hendey) Jouse.* (l) L: *Asteromphalus imbricatus - Wallich.* (m) M: *Pseudotriceratium cinnamomeum - (Greville) Grunow.* (n) N: *Thalassiosira kozlovii - Makarova.* (o) O: *Coscinodiscus radiatus - Ehrenberg.* (p) P: *Diploneis bombus - Cleve-Euler in Backman et Cleve-Euler.* (q) Q: *Stephanodiscus sp.* (r) R: *Actinoptychus undulatus - (Bailey) Ralf.* (s) S: *Actinoptychus bipunctatus - Lohman.* (t) T: *Actinoptychus splendens - (Shadbolt) Ralf ex Pritchard.* (u) U: *Nitzschia reinholdii - Kanaya emend Barron & Baldauf.*

Para entrenar al sistema, cada imagen de la Figura 6 se rotó un ángulo $\Delta\theta k$, con $k = 0, 1, .., 359$ y $\Delta\theta = 1°$; por lo que, para cada imagen de referencia se tienen 360 imágenes. Por ejemplo, de la diatomea A se obtuvo el conjunto de imágenes $\{A_0, A_1, A_2, ..., A_{359}\}$, donde la imagen A_k corresponde a la diatomea A rotada k grados, con $k = 0, 1, ..., 359$. De esta forma, la base de datos de imágenes de entrenamiento tiene 7560 elementos.

Posteriormente, se calculan las firmas de cada imagen de entrenamiento mediante el procedimiento descrito en la sección 3.2. Por ejemplo, para la diatomea A, se obtuvieron los dos conjuntos de firmas

$$\left\{f_R^{A_k} | k = 0, 1, ..., 359\right\} \tag{26}$$

y

$$\left\{f_I^{A_k} | k = 0, 1, ..., 359\right\}. \tag{27}$$

Para cada firma $f_R^{A_k}$ del conjunto (26) se calculó el escalar real $P_R^{A_k}$, denominado *potencia de la firma* $f_R^{A_k}$, a partir de la ecuación

$$P_R^{A_k} = \frac{\sum_{n=1}^{N} \left[f_R^{A_k}(n)\right]^2}{N}, \tag{28}$$

donde N es el tamaño de la firma, lo que dio lugar al conjunto

$$P_R^A = \left\{P_R^{A_k} | k = 0, 1, ..., 359\right\}. \tag{29}$$

Análogamente, a partir del conjunto (27) se determinó el conjunto

$$P_I^A = \left\{P_I^{A_k} | k = 0, 1, ..., 359\right\}. \tag{30}$$

Entonces, a cada imagen A_k le corresponden dos números reales: $P_R^{A_k}$ y $P_I^{A_k}$, $k = 0, 1, ..., 359$.

La media muestral de los conjuntos P_R^A y P_I^A, está dada por

$$\bar{X}_{P_R^A} = \frac{\sum_{k=0}^{359} P_R^{A_k}}{360}, \quad \bar{X}_{P_I^A} = \frac{\sum_{k=0}^{359} P_I^{A_k}}{360}, \tag{31}$$

y la desviación estándar de cada media por

$$\sigma_{P_R^A} = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{359}(P_R^{A_k} - \bar{X}_{P_R^A})^2}{n-1}}, \quad \sigma_{P_I^A} = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{359}(P_I^{A_k} - \bar{X}_{P_I^A})^2}{n-1}}. \tag{32}$$

El teorema del límite central afirma que, si de una población con una distribución cualquiera con media μ y desviación estándar σ se extraen muestras aleatorias de n observaciones, entonces, cuando n es suficientemente grande, la distribución muestral de las medias muestrales $\bar{X}$ se distribuye de manera aproximadamente normal, con media μ y desviación estándar $EE = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, conocida como error estándar [12].

Para el ejemplo de la diatomea A, de una muestra de 360 imágenes se calcularon los estimadores $P_R^{A_k}$, $k = 0, 1, ..., 359$. Por el teorema del límite central, al ser considerablemente grande la muestra, las potencias $P_R^{A_k}$ tienen una distribución normal. Además $\bar{X}_{P_R^A}$ tiende a $\mu_{P_R^A}$ y $EE_{P_R^A} = \sigma_{P_R^A}/\sqrt{360}$, donde $\mu_{P_R^A}$ es la media poblacional. Análogamente, lo anterior se cumple para las potencias $P_I^{A_k}$.

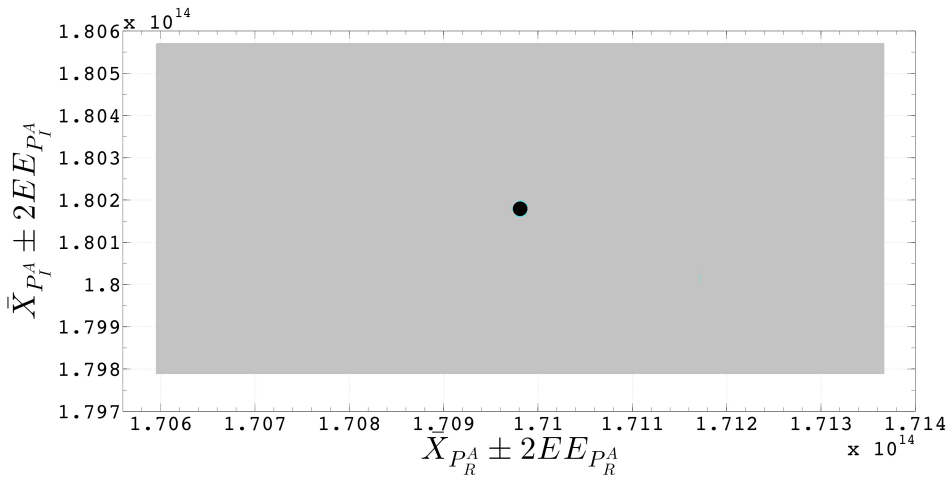


Figura 7: Rectángulo de confianza del 95.4 % en color gris y el punto negro indica la coordenada $(\bar{X}_{P_R^A}, \bar{X}_{P_I^A})$.

Como las potencias de las firmas obtenidas a partir de la imagen A tienen una distribución normal, se pueden generar intervalos de confianza. Siguiendo la metodología de las gráficas de los diagramas de cajas, se construyeron los intervalos de confianza del 95.4 % para cada uno de los dos conjuntos de las potencias de las firmas y, a partir de ahí, se construyó el rectángulo de confianza del 95.4 % graficando los valores $\bar{X}_{P_R^A} \pm 2EE_{P_R^A}$ en el eje horizontal y $\bar{X}_{P_I^A} \pm 2EE_{P_I^A}$ en el eje vertical, que se muestra en color gris en la Figura 7. En la misma gráfica, la coordenada de las medias muestrales $(\bar{X}_{P_R^A}, \bar{X}_{P_I^A})$ se indica en negro.

Siguiendo un procedimiento análogo para cada imagen digital en la base de datos de imágenes de referencia, se construyen los rectángulos de confianza para generar el plano de clasificación. En la Figura 8 se muestra el plano de clasificaición para las imágenes en escala de grises de fósiles de diatomeas de la Figura 6.

Para que se observe con claridad que el sistema de reconocimiento de patrones clasifica eficientemente cada una de las imágenes problema, se presentan dos amplificaciones en las Figura 9 y Figura 10, donde se observa que ninguno de los rectángulos se traslapa. Logrando de esa manera el objetivo de tener un único plano de clasificación y así reducir el tiempo de cómputo al momento de indentificar a los objetos en las imágenes digitales.

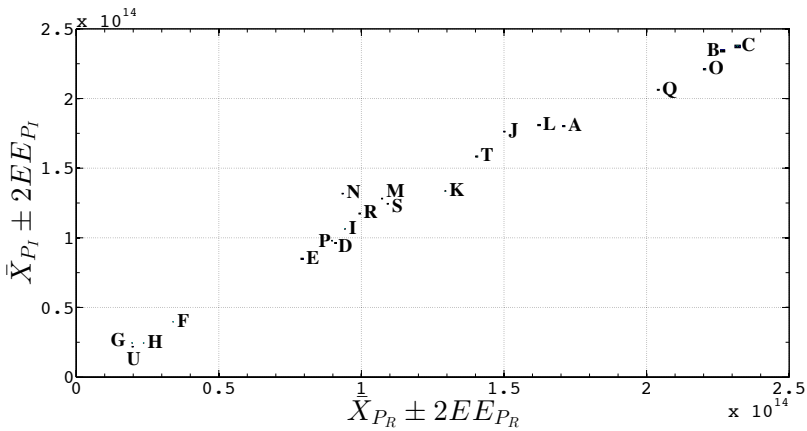


Figura 8: Plano de clasificación de las imágenes de la Figura 6.

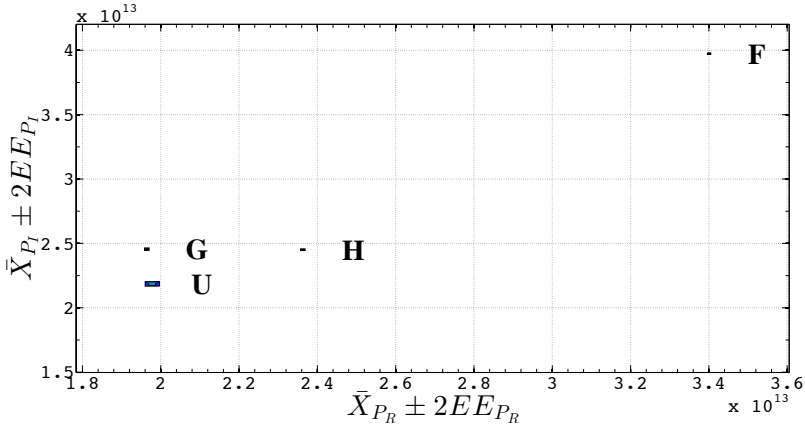


Figura 9: Amplificación de la Figura 8 correspondientes a los rectángulos de confianza de diatomeas G, U, H y F.

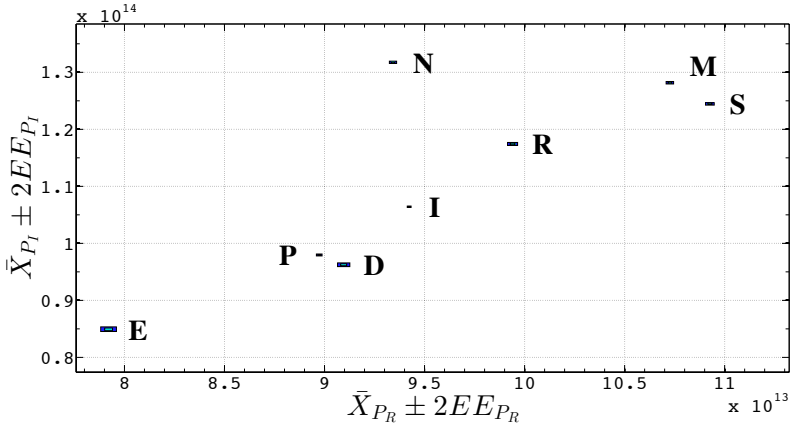


Figura 10: Amplificación de la Figura 8 correspondientes a los rectángulos de confianza de diatomeas E, P, D, I, N, R, M y S.

En el reconocimiento de patrones en imágenes digitales, el tiempo de cómputo es un factor determinante, debido a la gran cantidad de imáge-

nes que se manejan. Solorza y Álvarez-Borrego [14], proponen las máscaras binarias de anillos concéntricos denominadas *máscaras Fourier* (M_R) y *máscaras Bessel* (B_P), las cuales son generadas en un tiempo mayor al utilizado para generar las máscaras de Hilbert H_R y H_I. En la tabla 1, se muestra la comparación del tiempo promedio en que se genera H_R, M_R y B_P, obtenido a partir de una muestra de 50 elementos para cada caso. La máquina utilizada para este análisis es una: iMac con procesador 2.4 GHz Intel Core 2 Duo, memoria 2 GB 667 MHz DDR2 SDRAM.

Tabla 1: Tiempo de cómputo promedio.

Máscara	**Tiempo (segundos)**
H_R	0.0206242682705
M_R	0.5236733341570
B_P	0.1167171006915

6 Conclusiones

A partir de la teoría y del estudio de las aplicaciones de la transformada de Hilbert se logró proponer un par de máscaras binarias de anillos concéntricos (*máscaras de Hilbert*), mediante las cuales se obtienen firmas unidimensionales invariantes por translación y rotación para una imagen dada. Además, a partir de la potencia de las firmas obtenidas se pudo construir un único plano de clasificación, a diferencia de los múltiples planos de clasificación empleados en los sistemas de reconocimiento de patrones por correlación.

Por otra parte, el tiempo promedio en que se generan las máscaras de Hilbert es considerablemente menor al tiempo en que se generan las máscaras binarias de anillos Bessel y Fourier, reduciéndose así considerablemente el tiempo de cómputo empleado por el sistema para clasificar imágenes digitales. De esto, la implementación de las máscaras de Hilbert se puede catalogar como parte del desarrollo de una nueva técnica más eficiente para obtener la invarianza por rotación en un sistema de reconocimiento de patrones en imágenes digitales.

El sistema de reconocimiento de patrones implementado permite reconocer y clasificar los distintos tipos de fósiles de diatomeas de la base de datos con

la que se trabajó. De la misma forma, es posible obtener resultados análogos para el reconocimiento de distintos objetos capturados en imágenes digitales a escala de grises, sin importar la posición y la orientación de estos.

Agradecimientos

Al CONACYT por su apoyo al proyecto *Reconocimiento de patrones en imágenes digitales mediante máscaras binarias de anillos concéntricos y firmas unidimensionales invariantes por posición, rotación y escalamiento* (No. 169174). A los árbitros que revisaron este trabajo.

Bibliografía

[1] Alcaraz D., *Reconocimiento de patrones en imágenes digitales usando máscaras de Hilbert binarias de anillos concéntricos*. Tesis de licenciatura, UABC, 2015.

[2] Álvalrez J., Solorza, S., *Reconocimiento de patrones en imágenes digitales de fósiles de diatomeas*. Notas de clase.

[3] Bracewell, R., *Fourier Analysis and Imaging*. Springer, 2003.

[4] Cooley, J.W., Tukey, J.W., *An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series*. Mathematics of Computation **19** (1965), 297–301.

[5] Davis, J.A., McNamara, D.E., Cottrell, D.M., *Image processing with the radial Hilbert transform: theory and experiments*. Optics Letters **25** (2000), 99–101 .

[6] Felsberg, M., Sommer, G., *The Monogenic Signal*. IEE Transactions on Signal Processing **49** (2001), 3136–3144.

[7] Gabor, D., *Theory of communication*. Journal of the Institute of Electrical Engineers **93** (1946), 429–457.

[8] González, R.C., Woods, R.E., Eddins, S.L., *Digital Image Processing using MATLAB*. 2da. ed. Tata McGraw-Hill, 2010.

[9] King, F.W., *Hilbert Transforms. Volumen 1.* Cambridge University Press, 2009.

[10] Larkin, K.G., Bone, D.J., Oldfield, M.A., *Natural demodulation of two-dimensional fringe patterns. I. General background of the spiral phase quadrature transform.* J. Opt. Soc. Am. A. **18** (2001), 1862–1870.

[11] Lorenzo, J.V., *An Approach to the 2D Hilbert Transform for Image Processing Applications.* Image Analysis and Recognition, 4th International Conference, ICIAR. Springer, pp. 157–165, 2007.

[12] Mendenhall, W., Beaver, R.J., *Introducción a la probabilidad y estadística*, Thomson, 2008.

[13] Pei, S.C., Ding, J.J., *The generalized Radial Hilbert Transform and its applications to 2-D edge detection (any direction or specified directions).* Acoustics, Speech, and Signal Processing **3** (2003), 357–360.

[14] Solorza, S., Álvarez, J., *Position and rotation-invariant pattern recognition system by binary masks.* Journal of Modern Optics **62** (2015).

[15] Shih, F.Y., *Image Processing and Pattern Recognition. Fundamentals and Thechniques.* Wiley, 2010.

Facultad de Ciencias, UBAC
Carretera Transpeninsular Ensenada - Tijuana No. 3917, Colonia Playitas, Ensenada, B.C. C.P

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

diegoalcaraz2@gmail.com
selene.solorza@uabc.edu.mx

Índice de autores

Aguirre Salado, Alejandro Iván, 128
Alcaraz Ubach, Diego Francisco, 29
Analco Panohaya, América Guadalupe, 51
Argüelles Ortiz, Alma Rosa, 74

Climent Hernández, José Antonio, 103

Garza Gaona, Luis Enrique, 5

Hernández Bautista, Luz Marina, 103
Hernández Rebollar, Lidia Aurora, 51
Herrera Carrasco, David, 147

Jiménez Hernández, José del Carmen, 128

López Cerino, Marisol, 128

Macías Romero, Fernando, 147
Montero Rodríguez, Germán, 147

Ortiz Ramírez, Ambrosio, 103

Rubio-Pizzorno, Sergio Andrés, 74

Solorza Calderón, Selene, 29

Matemáticas y sus aplicaciones 15
Editado por Fernando Macías Romero y David Herrera Carrasco está a disposición en pdf en la página
de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP)
www.fcfm.buap.mx
a partir del 26 de octubre de 2020
peso del archivo: 6 MB
El cuidado de la edición es de Antonio de Jesús Libreros López.