Universidad Autónoma de Baja California
Facultad de Ciencias

Reconocimiento de patrones en señales sinusoidales tipo ondículas

Tesis que para cubrir parcialmente los requisitos para obtener el grado de DOCTOR EN CIENCIAS presenta:

M.I. Perla Karina Barba Rojo

Dra. Selene Solorza Calderón
Director
Facultad de Ciencias,
UABC

Dr. Antonio González Fernández
Co-Director
Departamento de Geología
División de Ciencias de la Tierra
CICESE

Ensenada, Baja California, México, junio de 2017

Índice

Índice de Figuras

Índice de Tablas

RESUMEN de la Tesis que presenta **Perla Karina Barba Rojo** como requisito parcial para la obtención del grado de **DOCTOR EN CIENCIAS E INGENIERÍA**. Ensenada, Baja California, México. Junio de 2017.

RECONOCIMIENTO DE PATRONES EN SEÑALES SINUSOIDALES TIPO ONDÍCULAS

Aprobado por:

Dra. Selene Solorza Calderón
Director de Tesis

Dr. Antonio González Fernández
Codirector de Tesis

En este trabajo se diseñó una metodología para localizar en imágenes sísmicas señales sinusoidales de la forma del reflector simulador del fondo marino (por sus siglas en inglés BSR) y otros reflectores paralelos al fondo marino. El sistema utiliza el control de ganancia automático para disminuir las discontinuidades laterales. Se emplea la umbralización para la detección de bordes y la segmentación en las imágenes. Después del preprocesamiento de las imágenes, se usa la técnica de análisis multiresolución 2D para automatizar la clasificación de las señales sinusoidales BSR de una manera robusta. A partir de imágenes sintéticas y de datos reales se validó la metodología propuesta, obteniendo excelentes resultados en ambos tipos de imágenes.

Palabras clave: procesamiento de señales sinusoidales, MRA 2D, transformada wavelet, reconocimiento de patrones.

ABSTRACT of the Thesis, presented by **Perla Karina Barba Rojo**, in order to obtain the **DOCTOR DEGREE** in **SCIENCES AND ENGINEERING**. Ensenada, Baja California, México. June, 2017.

RECONOCIMIENTO DE PATRONES EN SEÑALES SINUSOIDALES TIPO ONDÍCULAS

Approved by:

Dra. Selene Solorza Calderón — Thesis Advisor

Dr. Antonio González Fernández — Thesis Co-Advisor

This work presents a methodology, its implementation and validation, to detect automatically the sinusoidal signals of the type of Bottom-Simulating Reflectors (BSR) and other reflectors parallel to the sea bottom, on real seismograms. The system uses the Automatic Gain Control (AGC) to improve lateral continuity, and the thresholding method for edge detection and segmentation. After pre-processing the seismic reflection images, 2D multiresolution analysis methodology was used to develop the automated pattern recognition system which detects the sinusoidad signals BSR and other parallel reflectors in a robust manner. Synthetic and real seismic images were used to validate the proposed methodology, showing excellent results in both cases.

Keywords: sinusoidal signal processing, MRA 2D, wavelet transform, pattern recognition.

P. Karina Barba Rojo (DEP)

Te imagino convertida en una libélula verde,
dando vueltas por algún lago,
los rayos del Sol brillan lindos en tus alitas.

Quizás estés viajando en el tiempo,
descubriendo los secretos del Universo,
tomando el Sol en alguna playa del pasado
o caminando por las calles de un planeta exótico.

Creías en Dios,
debes saber ya si existe o no,
tal vez te diviertes volando junto a otros ángeles,
con tu halo dorado y llena de gracia.

de Odín Mellin

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

Los avances tecnológicos de los últimos años han extendido el área de acción del procesamiento digital de señales, en particular el de reconocimiento de patrones. Mediante los sistemas de reconocimiento de patrones se puede automatizar la identificación de objetos y modelar diversos procesos de percepción humanos, como lo son la visión y la audición. Por citar algunos ejemplos, el reconocimiento de patrones se ha utiliza en diversas áreas para llevar a cabo tareas como:

- Clasificación: voz, caracteres, facial, huellas dactilares.
- Conteo: partículas, moléculas, objetos astronómicos, plantas.
- Diagnóstico médico: encefalogramas, ultrasonidos, tomografías, rayos X.
- Compresión de imágenes: satelitales, de radar, de sondas espaciales, de telescopios espaciales.

La extracción de características o atributos de las señales (en dimensión uno, dos y tres) es una parte importante del reconocimiento de patrones, ya que nos permite obtener información del objeto para representarlo y describirlo de manera cuantitativa, única y completa, y así poder diferenciarlo y clasificarlo[20]. El éxito de la clasificación está fuertemente ligada a la topología y dimensión de los atributos, que pueden pertenecer al dominio temporal, espacial y/o de frecuencias[15, 18]. Existen numerosos procedimientos para la extracción de atributos, algunos de ellos incluyen la aplicación de transformaciones, como por ejemplo la transformada de Fourier, la cual se utiliza para obtener el espectro de amplitud de una señal y de ahí calcular su energía y potencia[22]; otro ejemplo de extracción de atributos en una señal es calcular la tasa de cruce por cero, es decir, la suma de las veces que la señal cruza el eje de las abscisas, la cual indica el nivel de ruido en una señal[15]. Una vez que se extraen las características o atributos en una señal, sigue la evaluación de las mismas para su clasificación. Existen diferentes enfoques o modelos, algunos de ellos involucran comparación de atributos u observación de las relaciones estructurales[20, 23]; en métodos más sofisticados se involucran teorías estadísticas[37] y en algunos casos, hasta se llega a utilizar los principios de la organización de los cerebros biológicos para construir sistemas inteligentes[25]; todo ello con el fin de catalogar al objeto de estudio en alguna clase o tipo.

1.2. Justificación

Desde hace décadas, las transformadas integrales han tenido importantes aplicaciones en el reconocimiento de patrones. Uno de los objetivos de esta propuesta es realizar un estudio profundo de dichas transformaciones y concebir técnicas novedosas que permitan la extracción de distintos atributos o combinaciones de ellos de manera más simple, rápida y económica. En este trabajo se propone diseñar una metodología para la identificación de patrones en señales sinusoidales tipo ondícula, que sea confiable, de bajo costo y eficiente en el uso de recursos computacionales. En particular, se trabajará con el problema de la caracterización de zonas con hidrocarburos en fase gaseosa (gas natural) en imágenes de sísmica de reflexión del área del Golfo de California. La caracterización de los cuerpos geológicos, se llevará a cabo mediante la extracción de atributos de las trazas sísmicas digitalizadas, aprovechando que son series de tiempo finitas cuya forma es sinusoidal tipo ondícula. Actualmente, el gas natural es visto como una de las primordiales y más relevantes fuentes de energía, utilizadas por todo el planeta tanto para uso doméstico como para uso industrial o comercial. Se considera que, en comparación con otras fuentes de energía como el petróleo o el carbón, el gas es un tipo de energía menos nociva para el medio ambiente, ya que no genera cantidades de dióxido de carbono iguales a las que producen los dos tipos de energía antes citados.

1.3. Planteamiento del problema

El procesamiento digital de señales mediante el uso de las transformadas integrales tiene un amplio rango de aplicaciones encaminadas a la identificación de patrones en diferentes áreas. Una de las tareas del reconocimiento de patrones se enfoca en la extracción de características que permitan representar y describir la señal como una entidad única para poder distinguirla de otras señales y a su vez identificarla como integrante de alguna clase. Existe un sinnúmero de procedimientos para la extracción de atributos, desafortunadamente en muchas ocasiones la no relevancia de los mismos puede originar que la clasificación sea compleja y poco eficiente[18].

En esta investigación se presentará una metodología para la extracción de un conjunto de atributos en señales sinusoidales tipo ondícula, los cuales nos permitirán la clasificación de los patrones de forma sencilla, eficiente y confiable. Como caso de estudio, se utilizará el problema que se presenta en geociencias sobre la caracterización de áreas con gas natural. Éste es un caso idóneo, ya que los datos obtenidos mediante la técnica de sísmica de reflexión (Fig. 1.1) son trazas sísmicas que son señales sinusoidales tipo ondícula. Hasta hace algunas décadas, la interpretación de esos datos era en esencia cualitativa y realizada por técnicos con vasta experiencia en geología y geofísica[5]. Actualmente existe paquetería de cómputo para la extracción de atributos, pero en muchos de los casos los costos por licencia para estaciones de trabajo son elevados y aunque existe software de licencia pública, el procesamiento suele ser lento y complejo. La metodología propuesta en este trabajo permitirá que el sistema de reconocimiento de BSR en imágenes de sísmica de reflexión sea implementado en computadoras de escritorio, con lo cual será posible el procesamiento in situ al momento de realizar la adquisición de los datos.

1.4. Preguntas de investigación

1. ¿Cuáles características o atributos y combinaciones de estos son apropiados para diseñar metodologías de reconocimiento de patrones en señales sinusoidales tipo ondícula?

2. ¿Qué procesamiento en las señales son necesarios para la extracción de dichas

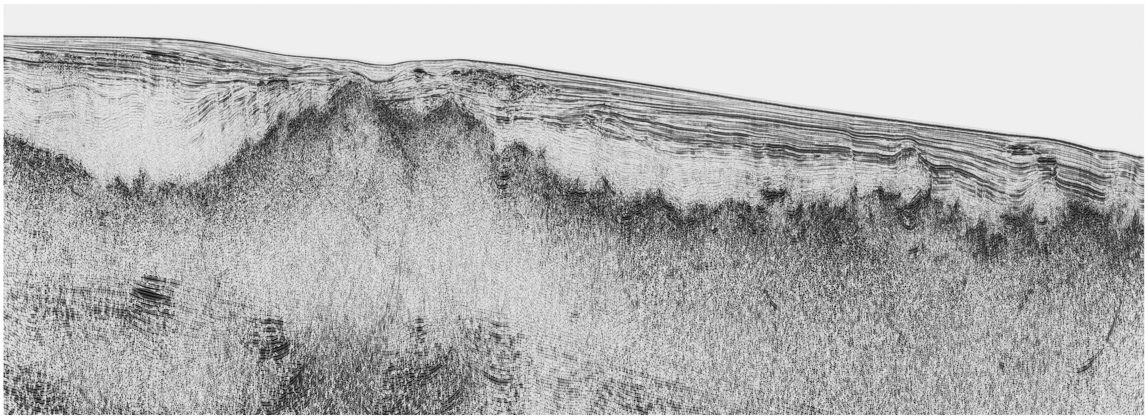


Figura 1.1: Sección sísmica de la línea de coordenada geográfica $(25.98562°, -110.52102°)$ a la coordenada $(25.94303°, -110.56807°)$ en la Cuenca Farallón, Golfo de California.

características?

3. ¿Qué particularidades deberán tener las señales que servirán como referencia para la identificación de patrones en señales sinusoidales?

4. ¿Cuál o cuáles transformadas integrales son las apropiadas para desarrollar clasificadores para el reconocimiento de patrones?

5. ¿Cuáles de esas transformadas integrales ofrecen mayor nivel de confiabilidad en los resultados?

6. ¿Cuáles de esas transformadas integrales son más eficientes en tiempo de ejecución y uso de memoria?

7. ¿Las metodologías diseñadas realmente ofrecen un nivel de confiabilidad aceptable y eficiente en el uso de recursos (tiempo de procesamiento, uso de memoria)?

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo general

Disenãr y validar una metodología para el reconocimiento de patrones en señales sinusoidales tipo ondícula, utilizando transformadas integrales para la extracción de atributos.

1.5.2. Objetivos específicos

1. Extraer características o atributos de señales sinusoidales tipo ondícula, utilizando transformadas integrales.

2. Determinar las combinaciones de atributos que son las apropiadas para ser utilizadas como clasificadores.

3. Establecer las particularidades que deberán tener las señales que servirán como referencia para la identificación de patrones.

4. Diseñar una metodología que permitan el reconocimiento efectivo de patrones en señales sinusoidales tipo ondícula.

5. Implementar dicha metodología en un lenguaje de programación de alto nivel.

6. Probar la metodología con trazas sísmicas provenientes de la técnica de sísmica de reflexión.

7. Validar la metodología mediante el uso de teorías de la estadística paramétrica para determinar su nivel de confiabilidad.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Origen y representación de señales

Una señal es una medida física que se puede expresar como una gráfica de su variación contra el tiempo y/o distancia. Ejemplo de ello son los sismogramas que expresan la variación en tiempo del movimiento del suelo, los electrocardiogramas que son un registro de la actividad eléctrica del corazón medida entre dos puntos de la superficie corporal, los encefalogramas que registran los potenciales bioeléctricos generados por la actividad neuronal del cerebro o el sonido que se propaga en forma de ondas a través de un medio elástico. Las señales tienen características que proporcionan la información necesaria para su interpretación; en señales biomédicas, como los encefalogramas o electrocardiogramas, esas características se usan en el diagnóstico o investigación médica y en los sismogramas se usan para conocer las condiciones geológicas del subsuelo. Muchas de esas señales se representan en forma de onda.

2.1.1. Sonido

Desde un punto de vista físico, el sonido es una vibración que se propaga en un medio elástico (sólido, líquido o gaseoso), generalmente el aire. Para que se origine un sonido se requiere la existencia de un cuerpo vibrante y del medio elástico transmisor de esas vibraciones, las cuales se propagan a través del medio constituyendo la onda sonora[33].Cuando un cuerpo vibra en el aire, obliga a que las partículas de ese medio entren también en vibración, siempre con cierto retraso respecto a las anteriores, su avance se traduce en una serie de compresiones o regiones donde las partículas del medio se aproximan entre sí en un momento dado; y dilataciones o regiones donde las partículas estarán más separadas entre sí, conocidas también como rarefacciones. Debido a que esas compresiones y dilataciones avanzan con la onda, a la onda sonora se le conoce como onda de presión. Las ondas sonoras son longitudinales, ya que el desplazamiento de las partículas es paralelo a la dirección de propagación [21].

El sonido es como una sucesión de ondas de compresión y rarefacciones que se propagan por el aire (Fig. 2.1). Sin embargo, si nos ubicamos en un punto en el espacio veremos cómo la presión atmosférica aumenta y disminuye periódicamente a medida que tienen lugar las sucesivas perturbaciones.

La representación del sonido puede llevarse a cabo mediante la utilización de un oscilograma, el cual registra el valor de la presión sonora (incremento en la presión atmosférica) en cada instante de tiempo en un punto fijo[21]. Es decir, que la representación más usual de la onda sonora es como la variación de presión sonora en el tiempo.

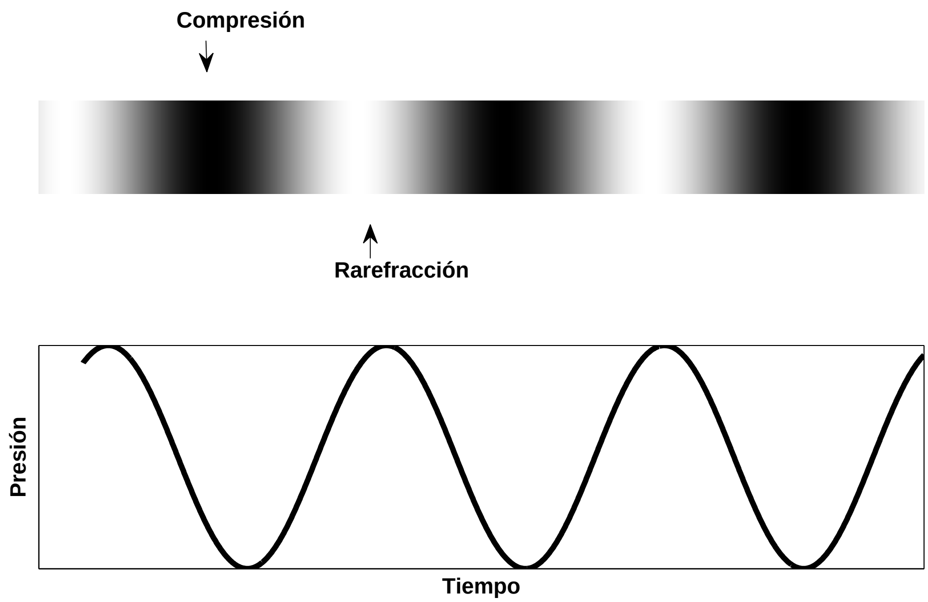


Figura 2.1: Ondas de compresión y rarefacciones propagadas por el aire.

2.1.2. Sismograma

La técnica más utilizada para la exploración sísmica se realiza a través de prospecciones sísmicas de reflexión. El principio de esta técnica consiste en una forma de ecosonda. Un pulso compresional (onda P) generado por una fuente en la superficie, penetra desde unos metros hasta varios kilómetros y se refleja como un eco desde las interfaces entre las capas de distintos tipos de roca (reflectores). Los ecos se reciben a través de un arreglo de sensores (geófonos o hidrófonos) y son grabados como pulsos; los pulsos sucesivos se almacenan de tal manera que el resultado es un tren de onda de varios segundos de longitud y se visualiza como una traza con forma sinusoidal (sismograma)[16]. Al tiempo que toma la onda sísmica en viajar hacia el reflector y regresar al emisor se le conoce como tiempo doble de viaje (TWT)[4].

2.1.3. Señales biomédicas

Las señales biomédicas son registros espaciales, temporales o espacio-temporales de eventos tales como el latido del corazón o la contracción de un músculo. La actividad eléctrica, química o mecánica que ocurre durante estos eventos biológicos frecuentemente produce señales que se pueden medir y analizar[34]. Ejemplo de ello son las señales bioeléctricas o potenciales bioeléctricos, que se pueden obtener de fenómenos como la actividad cerebral (EEG), cardiaca (ECG), musculo-esquelética (EMG), de retina (ERG), entre otros. Los potenciales bioeléctricos se producen como resultado de la actividad electroquímica de cierta clase de células llamadas células excitables, que son componentes del tejido nervioso, muscular o glandular[52]. En reposo dichas células presentan lo que se conoce como potencial de reposo; debidamente excitadas muestran lo que se conoce como potencial de acción. Una señal bioeléctrica es el resultado de registrar con electrodos los potenciales de acción de varias células.

2.2. Descripción matemática de las señales

Desde el punto de vista matemático, una señal es una función de una o más variables. La forma de una señal sonora o alguna señal biomédica como un ECG o EEG, cambia con respecto al tiempo, de tal manera que su amplitud es una función de una sola variable, es decir una señal unidimensional (1D). Dicha señal puede ser representada matemáticamente como $f(t)$. Una fotografía o un sismograma son señales bidimensionales (2D) ya que están definidas sobre un plano y pueden ser representadas matemáticamente como $f(x, y)$. Otro ejemplo es un vídeo, donde cada fotograma tiene dimensión dos y el movimiento en el tiempo comprende una dimensión más, lo que hace que estas señales sean tridimensionales[29]. Además del número de dimensiones en una señal, éstas se dividen en análogas o digitales dependiendo si su dominio es continuo o discreto. En el caso de las señales analógicas, éstas se encuentran definidas para todos los valores en un intervalo dado; un ejemplo de ello es una señal sonora $f(t)$ donde $t \in [0, \infty)$. Las señales discretas, se definen sólo para determinados valores de t (no necesariamente equidistantes), un ejemplo es una traza sísmica $g(t_n)$ donde t_n es el valor de tiempo para cada muestra n, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$ y N corresponde al número de muestras tomadas[29].

2.2.1. Señales sinusoidales

Una señal sinusoidal es aquella que se representa mediante el movimiento armónico de partículas oscilando. Dicho movimiento se expresa como

$$f(t) = A \cdot cos(\omega t + \theta), \tag{2.1}$$

para $-\infty < t < \infty$. De tal manera que $f(t)$ queda definida por tres magnitudes: la amplitud A, la frecuencia angular ω y la fase θ. Ademas, $f(t)$ es periódica, es decir

$$f(t) = f(t + T), \tag{2.2}$$

para todo valor de t[22]. A la constante T que satisface tal relación se le denomina periodo. Repitiendo la ec.(2.2), se obtiene

$$f(t) = f(t + nT), \tag{2.3}$$

para $n \in \mathbb{Z}$.

2.3. Series de Fourier de ondas periódicas

Las series de Fourier deben su nombre al matemático francés Jean-Baptiste Joseph Fourier, quién desarrolló la teoría a principios del siglo XIX. Es una teoría muy utilizada en muchas ramas de las ciencias e ingeniería y a partir del gran avance tecnológico, su aplicación se ha extendido al procesamiento de señales.

Sea $f(t)$ una función periódica con periodo T, que puede ser representada mediante la serie trigonométrica de Fourier dada por

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot sen(n\omega_0 t) \right], \tag{2.4}$$

donde a_n y b_n son los coeficientes de Fourier, y

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \tag{2.5}$$

es la frecuencia fundamental y

$$\omega_n = n\omega_0, \tag{2.6}$$

es la enésima armónica[22].

Para que una función $f(t)$ de periodo T se pueda escribir en términos de la serie de Fourier, debe cumplir las condiciones de Dirichlet:

1. tener un número finito de discontinuidades en un período;

2. tener un número finito de máximos y mínimos en un período;

3. ser absolutamente integrable es un periodo, esto es

$$\left| \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \right| < \infty. \tag{2.7}$$

La función $f(t)$ es continua por tramos en el intervalo $\Big(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\Big)$ si satisface las condiciones de Dirichlet 1 y 2. Si $f(t)$ no es periódica, su representación por series de Fourier sólo es válida en el intervalo dado.

2.3.1. Cálculo de los coeficientes de Fourier

Para el conjunto $\Big\{1, cos(n\omega_0 t), sen(m\omega_0 t) \Big| n, m \in \mathbb{N}\Big\}$ se cumple que

$$\begin{aligned}
\int_{-T/2}^{T/2} cos(m\omega_0 t)dt &= 0, \text{ para } m \neq 0, &(2.8)\\
\int_{-T/2}^{T/2} sen(m\omega_0 t)dt &= 0, \text{ para todo } m, &(2.9)\\
\int_{-T/2}^{T/2} cos(m\omega_0 t) \cdot cos(n\omega_0 t)dt &= \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n, \\ \frac{T}{2}, & \text{si } m = n \neq 0, \end{cases} &(2.10)\\
\int_{-T/2}^{T/2} sen(m\omega_0 t) \cdot sen(n\omega_0 t)dt &= \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n, \\ \frac{T}{2}, & \text{si } m = n \neq 0, \end{cases} &(2.11)\\
\int_{-T/2}^{T/2} cos(m\omega_0 t) \cdot sen(n\omega_0 t)dt = &= 0, \text{ para todo } m \text{ y } n, &(2.12)
\end{aligned}$$

esto quiere decir que el conjunto $\Big\{1, cos(n\omega_0 t), sen(m\omega_0 t) \Big| n, m \in \mathbb{N}\Big\}$ es ortogonal en el intervalo $\Big(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\Big)$ (en el caso particular que $\frac{T}{2} = 1$ se dice que el conjunto es ortonormal)[22]. Que el conjunto sea ortogonal simplifica el cálculo para obtener los coeficientes de Fourier.

Para obtener la expresión de a_0, se integra la ec.(2.4) en el periodo,

$$\begin{aligned}
\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt &= \frac{a_0}{2}\int_{-T/2}^{T/2} dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cancelto{0}{\int_{-T/2}^{T/2} cos(n\omega_0 t)dt} + b_n \cancelto{0}{\int_{-T/2}^{T/2} sen(n\omega_0 t)dt}\right] \\
&= \frac{T}{2}a_0, \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt. \qquad (2.14)$$

Si se multiplica a la ec.(2.4) por $cos(n\omega_0 t)$, para $n \in \mathbb{N}$ y luego se integra en el periodo, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{-T/2}^{T/2} f(t)cos(n\omega_0 t)dt &= \frac{a_0}{2}\cancelto{0}{\int_{-T/2}^{T/2} cos(n\omega_0 t)dt} + \sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m \int_{-T/2}^{T/2} cos(m\omega_0 t)cos(n\omega_0 t)dt\right. \\
&+ \left. b_m \cancelto{0}{\int_{-T/2}^{T/2} sen(m\omega_0 t)cos(n\omega_0 t)dt}\right] \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-T/2}^{T/2} cos(m\omega_0 t)cos(n\omega_0 t)dt = \frac{T}{2}a_n, \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

entonces,

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)cos(n\omega_0 t)dt, \text{ para } n \in \mathbb{N}. \qquad (2.16)$$

Análogamente,

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)sen(n\omega_0 t)dt, \text{ para } n \in \mathbb{N}, \qquad (2.17)$$

se obtiene de multiplicar la ec.(2.4) por $sen(n\omega_0 t)$ e integrar en el periodo.

Usando que

$$
\begin{aligned}
cos(n\omega_0 t) &= \frac{e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}}{2}, && (2.18)\\
sen(n\omega_0 t) &= \frac{e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t}}{2i}, && (2.19)
\end{aligned}
$$

la ec.(2.4), después de agrupar apropiadamente los términos, se reescribe como

$$
f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) \cdot e^{in\omega_0 t} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2} \right) \cdot e^{-in\omega_0 t} \right], \tag{2.20}
$$

definiendo

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{a_0}{2}, && (2.21)\\
c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2}, && (2.22)\\
c_{-n} &= \frac{a_n + ib_n}{2}, && (2.23)
\end{aligned}
$$

la ec.(2.20), se escribe en forma polar como

$$
f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}, \tag{2.24}
$$

donde

$$
c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt, \tag{2.25}
$$

se le conoce como el coeficiente complejo de Fourier y se obtiene de multiplicar la ec.(2.24) por $e^{-in\omega_0 t}$, después integrar en el periodo $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ y usar el hecho que

$e^{in\omega_0 t} \cdot e^{-in\omega_0 t} = 1.$

2.4. La transformada de Fourier en una variable

Cuando $T = \frac{2\pi}{\omega_0} \to \infty$, $f(t)$ se convierte en una función no periódica, por lo que de la ec.(2.24),

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega_0 x} dx \right) e^{in\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega_0 x} dx \right) e^{in\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega_0 x} dx \right) \omega_0 e^{in\omega_0 t}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

como $T = \frac{2\pi}{\omega_0} \to \infty$ entonces $\omega \to 0$ y sea $\omega_0 = \Delta\omega$, así que $n\omega_0 = n\Delta\omega \to \omega$, por lo tanto

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\Delta\omega \cdot x} dx \right) e^{in\Delta\omega \cdot t} \Delta\omega, \tag{2.27}$$

cuando $T \to \infty$ se tiene que $\Delta\omega \to \omega$, entonces la función no periódica $f(t)$ se puede reescribir como

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right) e^{i\omega t} d\omega, \tag{2.28}$$

definiendo

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \tag{2.29}$$

la ec.(2.28) se reescribe como

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \tag{2.30}$$

a las ecs.(2.29) y (2.30) se les denomina **transformada de Fourier** y **transformada inversa de Fourier**, respectivamente. Otra manera de denotar a la transformada de Fourier de $f(t)$ es mediante $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ y a la transformada inversa de Fourier como $f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$.

Debido a que una gran mayoría de los fenómenos naturales se pueden modelar mediante funciones continuas y absolutamente integrables, la transformada de Fourier se utiliza en un amplio rango de aplicaciones, tales como filtrado, reconstrucción y compresión de imágenes, reconocimiento de patrones, entre otras[40]. En el área de procesamiento de imágenes digitales, esta transformación nos permite una manipulación más eficiente de la información debido a que muchas operaciones son más simples en el dominio de frecuencias[42].

2.5. Propiedades de la transformada de Fourier

Todas las demostraciones de las propiedades de la transformada de Fourier se encuentran en H.P. Hsu y R. Mehra[22].

2.5.1. Linealidad

La transformada de Fourier es una función lineal, por lo que preserva sumas y multiplicación por escalares, es decir, si $\mathcal{F}\{f_1(t)\} = F_1(\omega)$ y $\mathcal{F}\{f_2(t)\} = F_2(\omega)$, entonces

$$\mathcal{F}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega), \tag{2.31}$$

donde a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$.

2.5.2. Escalamiento

Si $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ y $a \neq 0 \in \mathbb{R}$, entonces

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right). \tag{2.32}$$

Esta propiedad establece que si la función $f(t)$ se escala por $a \neq 0$, la correspondiente transformada de Fourier se escalará por el inverso de $|a|$. Esto da a lugar a que si la función $f(t)$ se multiplica por un valor a tal que $|a| > 1$, entonces la amplitud de $f(t)$ incrementará mientras que la amplitud de su transformada de Fourier se comprimirá en el mismo valor. Por lo tanto, con la transformada de Fourier se tienen limitaciones con la resolución en el tiempo y la frecuencia.

2.5.3. Traslación

Esta propiedad establece que si la función $f(t)$ se desplaza una magnitud t_0, esto equivale a multiplicar la transformada de Fourier por el número complejo $e^{-i\omega t_0}$. Esto es, si $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ entonces

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = F(\omega)\ e^{-i\omega t_0}. \tag{2.33}$$

2.5.4. Traslación en frecuencia

Esta propiedad se refiere a que si la función $f(t)$ es multiplicada por $e^{-i\omega_0 t}$, equivale a desplazar la transformada de Fourier de la función original $f(t)$ en una magnitud de ω_0, es decir, si $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$, entonces

$$\mathcal{F}\{f(t)\ e^{-i\omega_0 t}\} = F(\omega - \omega_0). \tag{2.34}$$

2.5.5. Simetría o dualidad

Esta propiedad proviene de la similitud de la transformada de Fourier (ec. 2.29) y la transformada inversa de Fourier (ec. 2.30). Por ello, si conocemos la transformada de Fourier de $f(t)$, podemos utilizarla para calcular la transformada inversa de esa misma función evaluada en ω, es decir, $f(\omega)$.

Si $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$, entonces

$$\mathcal{F}\{F(t)\} = 2\pi\ f(-\omega). \tag{2.35}$$

2.5.6. Convolución en el dominio temporal

Uno de los aspectos más interesantes de la transformada de Fourier es su comportamiento ante operaciones de convolución. Si se tienen dos funciones $f(t)$ y $g(t)$, cuyas transformadas de Fourier son $F(\omega)$ y $G(\omega)$, respectivamente, la convolución de las funciones, denotada como $f(t) * g(t)$, será igual al producto de las transformadas de las funciones $F(\omega)G(\omega)$.

Formalmente esto es, si $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ y $\mathcal{F}\{g(t)\} = G(\omega)$, entonces

$$\mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} = F(\omega)G(\omega). \tag{2.36}$$

2.5.7. Convolución en el dominio de frecuencias

Sean $F(\omega)$ y $G(\omega)$ las transformadas de Fourier de $f(t)$ y $g(t)$, respectivamente. La transformada inversa de la convolución de $F(\omega)$ y $G(\omega)$ es 2π veces el producto de las transformadas de Fourier de las funciones $f(t)$ y $g(t)$. Si $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ y $\mathcal{F}\{g(t)\} = G(\omega)$, entonces

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega) * G(\omega)\} = 2\pi \; f(t) \cdot g(t). \tag{2.37}$$

2.6. De la transformada de Fourier a la transformada discreta de Fourier

Debido a que las imágenes son funciones discretas, se tiene que introducir la transformada discreta de Fourier, para ello se realizará primeramente en una variable.

Sea $f(t)$ una función periódica con período T, si se consideran solamente N valores equiespaciados para t, de tal manera que se cubra en su totalidad el periodo, es decir $0 \leq t_k < T$ para $k = 1, 2, \ldots, N-1$, donde

$$t_k = (k-1)\frac{T}{N}, \tag{2.38}$$

no es posible calcular con exactitud la integral de los coeficientes complejos de Fourier dada en la ec.(2.25), esto es

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-in\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\frac{2\pi}{T}t}dt, \tag{2.39}$$

pero es posible calcular una aproximación mediante la suma de Riemann[30]. En la Fig. 2.2, para el intervalo $k\frac{T}{N} \leq t \leq (k+1)\frac{T}{N}$, se tiene un rectángulo de altura $f\left(k\frac{T}{N}\right)$ y base $\frac{T}{N}$, por lo que

$$c_n \approx c_n^{(N)} = \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1} \frac{T}{N} f\left(k\frac{T}{N}\right)e^{-2\pi i\frac{kn}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(k\frac{T}{N}\right)e^{-2\pi i\frac{kn}{N}}, \tag{2.40}$$

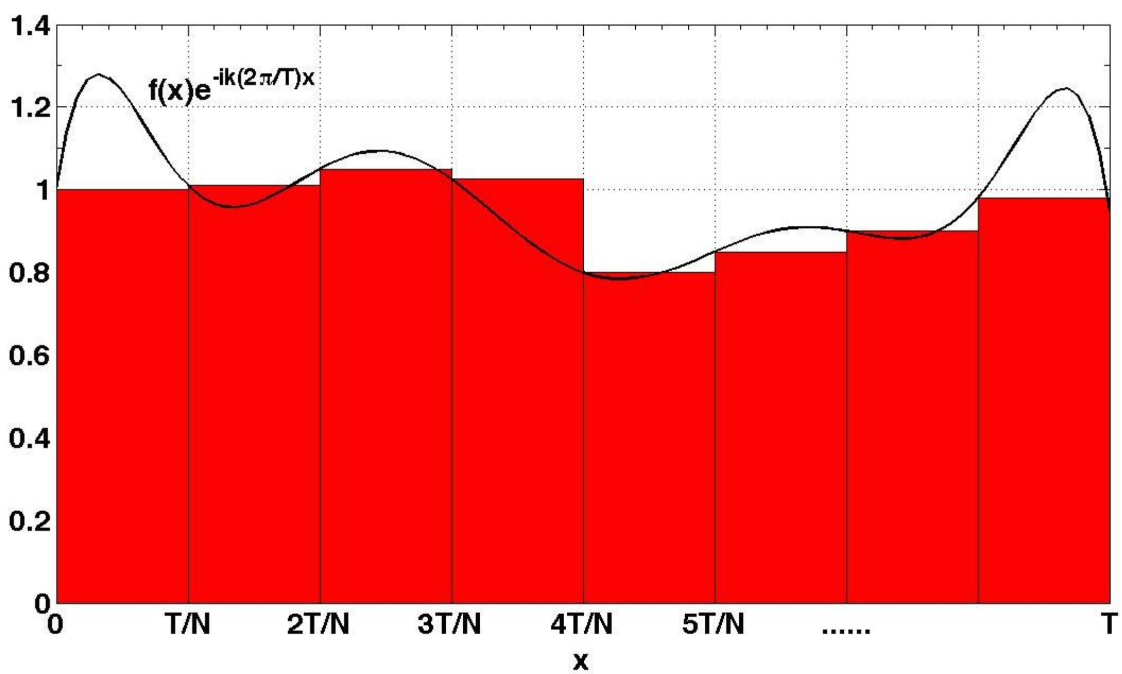


Figura 2.2: Representación esquemática de la aproximación de los coeficientes complejos de Fourier mediante la suma de Riemann.

definiendo

$$
\begin{aligned}
f_k &= f\left(k\frac{T}{N}\right), &(2.41)\\
\hat{f}_k &= c_k^{(N)}, &(2.42)
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\hat{f}_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i\frac{kn}{N}}, \tag{2.43}
$$

para $n = 0, 1, \ldots, N-1$. A la ec.(2.43) se le denomina **transformada discreta de Fourier** y su inversa está dada por

$$
f_k = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}_n e^{2\pi i\frac{kn}{N}}, \tag{2.44}
$$

con $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Usualmente, la notación utilizada para la transformada discreta de Fourier y su inversa, respectivamente, es

$$
\begin{aligned}
F(u) &= \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-2\pi i\frac{ux}{N}}, \quad u = 0, 1, \ldots, N-1, &(2.45)\\
f(x) &= \frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{2\pi i\frac{ux}{N}}, \quad x = 0, 1, \ldots, N-1. &(2.46)
\end{aligned}
$$

Definiendo

$$
\begin{aligned}
W &= e^{\frac{-2\pi i}{N}}, &(2.47)\\
\mathcal{W}(u,x) &= e^{-2\pi i\frac{ux}{N}}, &(2.48)
\end{aligned}
$$

como $x, u = 0, 1, \ldots, N-1$, se tiene que $\mathcal{W}$ es una matriz de tamaño N. Usando la ec.(2.48) en la ec.(2.56), ésta se reescribe como

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x)\mathcal{W}(x,u), \tag{2.49}$$

por lo que para un u fijo se tienen N multiplicaciones y como $u = 0, 1, \ldots, N-1$, entonces se tienen N^2 multiplicaciones, así que la complejidad computacional de la transformada discreta de Fourier es $\mathcal{O}\big(N^2\big)$.

2.7. La transformada rápida de Fourier

Debido a que la transformada discreta de Fourier tiene una complejidad computacional $\mathcal{O}\big(N^2\big)$, esto quiere decir que, en el peor de los casos el número de multiplicaciones es el cuadrado del número de las muestras en x, por lo que para N muy grande la ec.(2.56) no es nada práctica.

Si suponemos que N es una potencia de 2, esto es $N/2 \in \mathbb{N}$, podemos separar las muestras en x en pares e impares, esto es

$$\begin{aligned} F(u) &= \sum_{x=0}^{N/2-1} f(2x)e^{-2\pi i\frac{u(2x)}{N}} + \sum_{x=0}^{N/2-1} f(2x-1)e^{-2\pi i\frac{u(2x+1)}{N}} \\ &= \sum_{x=0}^{N/2-1} f(2x)e^{-2\pi i\frac{ux}{N/2}} + \sum_{x=0}^{N/2-1} f(2x-1)e^{-2\pi i\frac{u(2x)}{N}}e^{-2\pi i\frac{u}{N}} \\ &= \sum_{x=0}^{N/2-1} f(2x)e^{-2\pi i\frac{ux}{N/2}} + \left(e^{\frac{-2\pi i}{N}}\right)^u \sum_{x=0}^{N/2-1} f(2x-1)e^{-2\pi i\frac{ux}{N/2}}, \end{aligned} \tag{2.50}$$

usando la definición de la ec.(2.47), tenemos que

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N/2-1} f(2x)e^{-2\pi i \frac{ux}{N/2}} + W^u \sum_{x=0}^{N/2-1} f(2x-1)e^{-2\pi i \frac{ux}{N/2}}, \tag{2.51}$$

definiendo

$$F^{par}(u) = \sum_{x=0}^{N/2-1} f(2x)e^{-2\pi i \frac{ux}{N/2}}, \tag{2.52}$$

$$F^{impar}(u) = \sum_{x=0}^{N/2-1} f(2x-1)e^{-2\pi i \frac{ux}{N/2}}, \tag{2.53}$$

la ec.(2.51) se simplifica a

$$F(u) = F^{par}(u) + W^u F^{impar}(u), \tag{2.54}$$

como $N = 2^q$, entonces

$$q = q \cdot log_2(2) = log_2\left(2^q\right) = log_2(N), \tag{2.55}$$

aprovechando la periodicidad de $e^{-2\pi i \frac{ux}{N/2}}$, $F^{par}(u)$ y $F^{impar}(u)$ se pueden calcular de forma recursiva, por lo que el orden de complejidad computacional de la ec.(2.54) es $\mathcal{O}\Big(log_2 N\Big)$. A la ec.(2.54) se le conoce como **transformada rápida de Fourier**[10]. Por ejemplo, si $N = 100$, $N^2 = 10,000$ y $log_2(N) = log_2(100) = 6.6439 \approx 7$. Debido a esa gran diferencia en la complejidad computacional de los algoritmos, la mayoría de las transformaciones discretas se calculan vía la transformada rápida de Fourier.

2.8. La transformada discreta de Fourier 2D

Como las imágenes son funciones discretas de dos variable, $I(x,y)$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
I(u,v) &= \mathcal{F}\left\{I(x,y)\right\} = \sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{M-1} I(x,y)e^{-2\pi i\left(\frac{ux}{N}+\frac{vy}{M}\right)}, & (2.56)\\
u &= 0,1,\ldots,N-1, v=0,1,\ldots,M-1, & \\
I(x,y) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{I(u,v)\right\} = \frac{1}{NM}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{M-1} I(u,v)e^{2\pi i\left(\frac{ux}{N}+\frac{vy}{M}\right)}, & (2.57)\\
x &= 0,1,\ldots,N-1, y=0,1,\ldots,M-1, &
\end{aligned}
$$

que tienen orden de complejidad computacional $\mathcal{O}\big(N^2 \times M^2\big)$. Por lo que en la práctica se utiliza la transformada rápida de Fourier 2D.

2.9. Transformada de ondícula

Debido a que la transformada de Fourier tiene limitaciones con la resolución en el tiempo y la frecuencia (propiedad de escalamiento, ec.(2.32)), en 1990 se introdujo la transformada de ondícula (transformada *wavelet*) cuya principal ventaja es que permite llevar a cabo un análisis a diferentes resoluciones (análisis multiresolución), lo cual implica que se puedan estudiar las señales sin perder resolución tanto en el dominio del tiempo y la frecuencia simultáneamente[12]. La transformada de ondícula es una técnica que se ha convertido en una herramienta computacional útil para una gran variedad de aplicaciones, por ejemplo, en la compresión digital de imágenes permite generar archivos más pequeños, por ende se tendrá un almacenamiento que utiliza menos memoria; además, esto conlleva a la transmisión de imágenes de una manera más rápida y fiable[36].

La transformada de ondícula más básica es la transformada Haar descrita por Alfred Haar en 1910 y que además sirvió como prototipo de la actual transformada de ondícula. En 1985 Yves Meyer construye la ondícula Meyer, que es una ondícula ortogonal que tiene numerosas aplicaciones en la teoría de funciones, en métodos numéricos, en procesamiento de señales, entre muchas otras[9, 24]. En 1982, Jean Morlet introdujo la idea de la transformada de ondícula al análisis de las ondas sísmicas. Morlet consideró a las ondas sísmicas como una familia de funciones construidas a partir de traslaciones y escalamientos de una función única llamada *wavelet* madre $\psi(t)$[39].

2.9.1. Definición de ondícula

La palabra ondícula o *wavelet* significa onda pequeña y corta, es decir, una oscilación que decae rápidamente (Fig. 2.3). Una ondícula $\psi(t)$ debe satisfacer:

1. que sea cuadrático integrable, esto es

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty; \tag{2.58}$$

2. que su media sea cero, lo cual está dado por

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)| dt = 0; \tag{2.59}$$

3. que la constante de admisibilidad C_ψ sea finita (que la energía sea finita), es

decir

$$C_\psi \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\overline{\mathcal{F}\{\psi(\omega)\}}|^2}{|\omega|} d\omega < \infty; \qquad (2.60)$$

donde $\mathcal{F}\{\cdot\}$ representa la transformada de Fourier de la función dada, $\overline{\{\cdot\}}$ y $\big|\cdot\big|$ son el complejo conjugado y el módulo del escalar complejo, respectivamente.

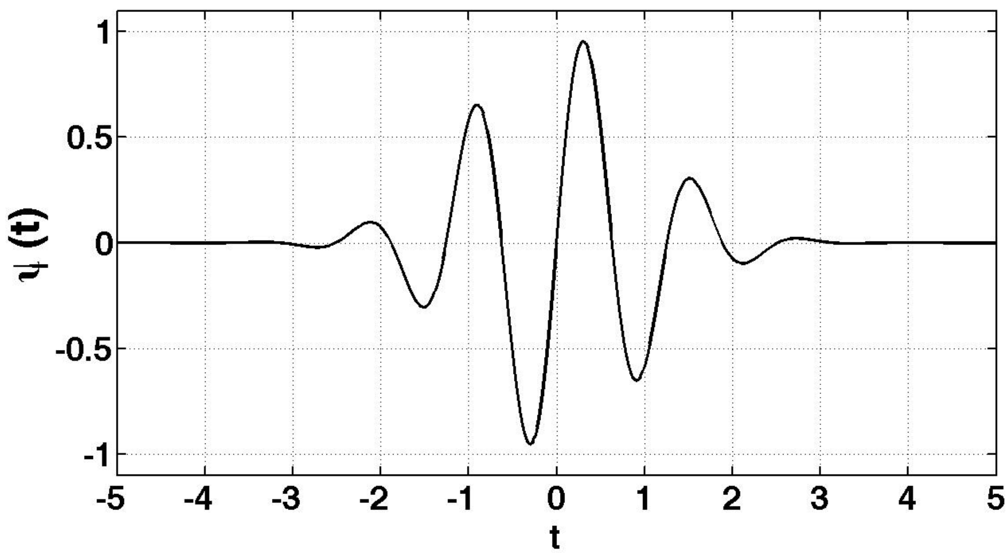


Figura 2.3: Ejemplo de ondícula.

A partir de una ondícula madre, $\psi(t)$, se puede generar una familia de ondículas mediante la traslación y escalamiento de $\psi(t)$, matemáticamente está dado por

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\ \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \qquad (2.61)$$

donde $a \neq 0 \in \mathbb{R}$ es el parámetro de escalamiento y $b \in \mathbb{R}$ es el parámetro de translación que determina la localización de la ondícula en el tiempo.

2.9.2. Algunas ondículas comúnmente utilizadas

1. La ondícula de Haar dada por

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1, \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases} \tag{2.62}$$

2. La ondícula sombrero mexicano (*mexican hat*) u ondícula de Ricker es la segunda derivada de la función Gaussiana, es decir

$$\psi(t) = (1 - 2t^2)e^{-t^2}. \tag{2.63}$$

3. La ondícula de Morlet definida como

$$\psi(t) = e^{i\omega_0 t - \frac{t^2}{2}}. \tag{2.64}$$

2.10. Definición de la transformada de ondícula

Morlet definió a la transformada de ondícula de $f(t) \in L_2(\mathbb{R})$ (funciones cuadrado integrables), como

$$\mathscr{W}_{\psi_{a,b}}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \overline{\psi_{a,b}}(t)\ dt, \tag{2.65}$$

donde $\psi_{a,b}$ es la ondícula madre o de análisis; a, b son los parámetros de escalamiento y translación, respectivamente; y, $\overline{\{\cdot\}}$ es el complejo conjugado del escalar complejo.

En la ec.(2.65), el núcleo $\psi_{a,b}$ juega un papel importante, de la misma manera

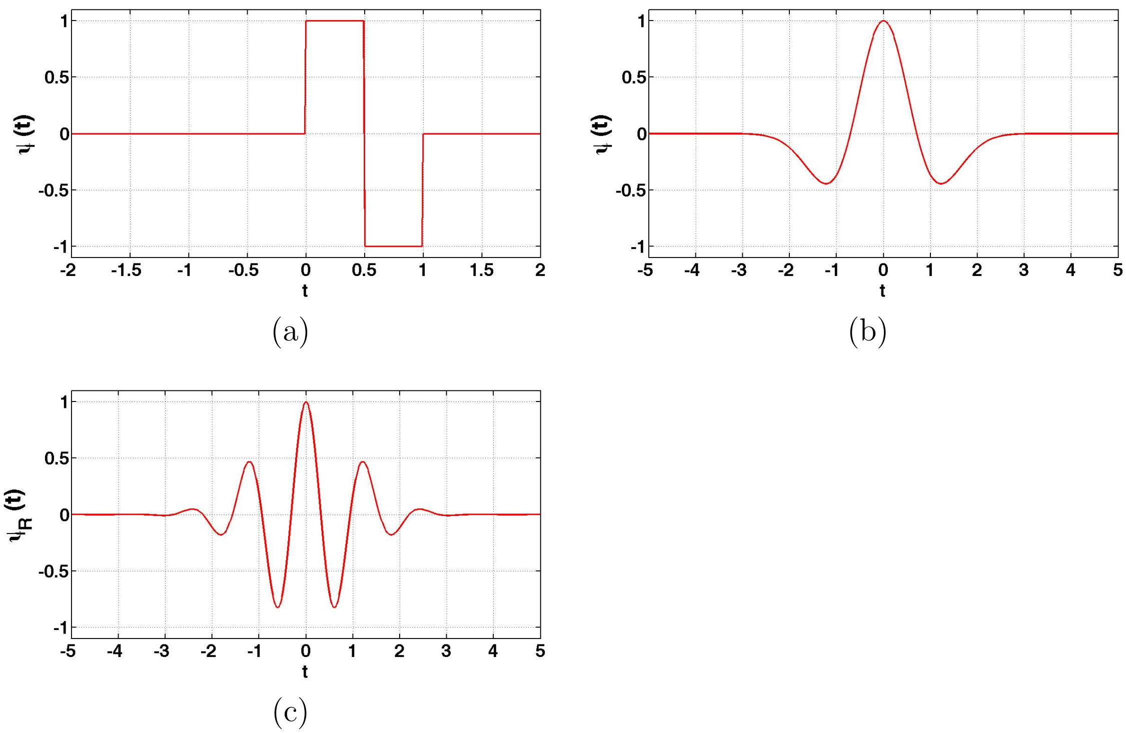


Figura 2.4: Ondículas comúnmente utilizadas. (a) Haar, ec.(2.62). (b) Ricker o sombrero mexicano, ec.(2.63). (c) Parte real de la ondícula Morlet, ec.(2.64) con $w_0 = 5$.

que en la transformada de Fourier lo es $e^{-i\omega t}$. Pero a diferencia de la transformada de Fourier cuyo núcleo es fijo, en la transformada de ondícula el núcleo es variable. En la Fig. 2.4 se muestran las formas de algunas ondículas comúnmente utilizadas.

La inversa de la transformada de ondícula está dada por la doble integral,

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{W}_{\psi_{a,b}}\{f(t)\}\ \psi_{a,b}(t)\ db\ da. \tag{2.66}$$

2.11. Propiedades de la transformada de ondícula

En esta sección se enlistan algunas de las propiedades más importantes de la transformada de ondícula que se utilizan en el procesamiento de señales. Las demostraciones de dichas propiedades son consecuencia directa de las definiciones (2.61) y (2.65).

2.11.1. Linealidad

Si ψ es una ondícula y $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, entonces

$$\mathscr{W}_{\psi_{a,b}}\big\{\alpha f(t) + \beta g(t)\big\} = \alpha \mathscr{W}_{\psi_{a,b}}\big\{f(t)\big\} + \beta \mathscr{W}_{\psi_{a,b}}\big\{g(t)\big\}, \tag{2.67}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2.11.2. Traslación

Si ψ es una ondícula y $f \in L^2(\mathbb{R})$, entonces

$$\mathscr{W}_{\psi_{a,b}}\big\{f(t-c)\big\} = \mathscr{W}_{\psi_{a,b-c}}\big\{f(t)\big\}, \tag{2.68}$$

donde $c \in \mathbb{R}$.

2.11.3. Dilatación

Si ψ es una ondícula y $f \in L^2(\mathbb{R})$, entonces

$$\mathscr{W}_{\psi_{a,b}}\left\{\frac{1}{c} f\left(\frac{t}{c}\right)\right\} = \mathscr{W}_{\psi_{\frac{a}{c},\frac{b}{c}}}\big\{f(t)\big\}, \tag{2.69}$$

para $c \in \mathbb{R}^+$.

2.11.4. Simetría

Si ψ, φ son ondículas, entonces

$$\mathscr{W}_{\psi_{a,b}}\big\{\varphi(t)\big\} = \overline{\mathscr{W}_{\varphi_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}}}\big\{\psi(t)\big\}}, \tag{2.70}$$

para $a \neq 0 \in \mathbb{R}$ y $\overline{\{\cdot\}}$ es el complejo conjugado del escalar dado.

2.11.5. Antilinealidad

Si ψ, φ son ondículas y $f \in L^2(\mathbb{R})$, entonces

$$\mathscr{W}_{\alpha\psi_{a,b}+\beta\varphi_{a,b}}\big\{f(t)\big\} = \overline{\alpha}\mathscr{W}_{\psi_{a,b}}\big\{f(t)\big\} + \overline{\beta}\mathscr{W}_{\varphi_{a,b}}\big\{f(t)\big\}, \tag{2.71}$$

para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2.11.6. Paridad

Si ψ es ondícula y $f \in L^2(\mathbb{R})$, entonces

$$\mathscr{W}_{\psi_{a,b}(-t)}\big\{f(-t)\big\} = \mathscr{W}_{\psi_{a,-b}}\big\{f(t)\big\}. \tag{2.72}$$

2.11.7. Otras propiedades

Si ψ es ondícula y $f \in L^2(\mathbb{R})$, entonces

$$\mathscr{W}_{\psi_{a,b}(t-c)}\big\{f(t)\big\} = \mathscr{W}_{\psi_{a,b+ca}}\big\{f(t)\big\}, \tag{2.73}$$

donde $c \in \mathbb{R}$.

$$\mathscr{W}_{\psi_{a,b}\left(\frac{t}{c}\right)}\big\{f(t)\big\} = \sqrt{c}\mathscr{W}_{\psi_{ac,b}}\big\{f(t)\big\}, \tag{2.74}$$

para $c \in \mathbb{R}^+$.

2.12. Análisis multiresolución

Una de las características más importante de las ondículas es que se puede llevar a cabo un análisis multiresolución (por sus siglas en inglés MRA), ya que posee la capacidad de separar la señal en componentes a diferentes resoluciones o escalas. La idea principal es utilizar la estrategia "divide y vencerás" en una señal, con el fin de procesar las distintas componentes utilizando diferentes algoritmos. Para comprender mejor el concepto del MRA es necesario introducir dos grupos de subespacios: subespacios de escalamiento y de ondícula.

Una funcion de escalamiento $\varphi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ genera una secuencia de subespacios anidados V_j en $L^2(\mathbb{R})$, tal que

$$\{0\} \subset \cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset L^2, \tag{2.75}$$

donde el subespacio V_j es generado por

$$\beta_{V_j} = \{\varphi(2^j t - k) | k \in \mathbb{Z}\}, \tag{2.76}$$

por lo tanto la función de escalamiento $\varphi(t)$ puede escribirse como

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{j,k} \; \varphi(2^j t - k), \tag{2.77}$$

para $\{p_{j,k}\}_{k=-\infty}^{\infty} \in \ell^2$, donde

$$\ell^2 = \left\{ \{\alpha_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \,\middle|\, \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty \right\}. \tag{2.78}$$

Para simplificar la notación $\varphi(2^j - k) \equiv \varphi_{j,k}(t)$. El espacio de ondículas W_j se define como

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \tag{2.79}$$

esto es, W_j es el complemento ortogonal de V_j en el subespacio V_{j+1}. El subespacio W_j es generado por

$$\beta_{W_j} = \{\psi(2^j t - k) | k \in \mathbb{Z}\}, \tag{2.80}$$

por tanto

$$\psi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_{j,k} \; \psi(2^j t - k), \tag{2.81}$$

para $\{q_{j,k}\}_{k=-\infty}^{\infty} \in l^2$. Para simplificar la notación $\psi(2^j - k) \equiv \psi_{j,k}(t)$.

Como

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\in V_j \subset V_{j+1}, & (2.82)\\ \psi(t) &\in W_j \subset V_{j+1}, & (2.83) \end{aligned}$$

las ecs.(2.82) y (2.83) proporcionan la relación de una función entre dos escalas diferentes, dadas por

$$\begin{aligned} \varphi(2^j t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{j+1,k}\ \varphi(2^{j+1}t-k), & (2.84)\\ \psi(2^j t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_{j+1,k}\ \varphi(2^{j+1}t-k), & (2.85) \end{aligned}$$

comúnmente se les conoce como relación de reconstrucción o síntesis. Normalmente, la relación de descomposición o análisis se usa para separar la señal en diferentes resoluciones o escalas, para clarificar esto, se usa la ec.(2.79) para reescribir $\varphi_{j+1,l}(t) \in V_{j+1}$ como una combinación lineal de las bases de V_j y W_j, es decir

$$\varphi_{j+1,l}(t) = \varphi(2^{j+1}t-l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ a_{j,k}^{(l)}\ \varphi_{j,k}(t) + b_{j,k}^{(l)}\ \psi_{j,k}(t) \right\}, \qquad (2.86)$$

donde $l \in \mathbb{Z}$ y $\left\{a_{j,k}^{(l)}\right\}_{k=-\infty}^{\infty}, \left\{b_{j,k}^{(l)}\right\}_{k=-\infty}^{\infty} \in \ell^2$.

Para $f_{j+1} \in V_{j+1}$, $f_j \in V_j$ y $g_j \in W_j$, se tiene que

$$\begin{aligned} f_{j+1}(t) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{j+1,l}\ \varphi_{j+1,l}(t), && (2.87) \\ f_j(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k}\ \varphi_{j,k}(t), && (2.88) \\ g_j(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k}\ \psi_{j,k}(t), && (2.89) \end{aligned}$$

y puesto que $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, es posible definir

$$f_{j+1}(t) = f_j(t) + g_j(t). \tag{2.90}$$

Sustituyendo las expresiones en las ecs.(2.87), (2.88) y (2.89) en la ec.(2.90), se obtiene

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{j+1,l}\varphi_{j+1,l}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k}\varphi_{j,k}(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k}\psi_{j,k}(t), \tag{2.91}$$

y usando la ec.(2.86) en el lado izquierdo de la ec.(2.91), se llega a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{j,k}^{(l)} c_{j+1,l}\phi_{j,k}(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{j,k}^{(l)} c_{j+1,l}\psi_{j,k}(t)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[c_{j,k}\phi_{j,k}(t) + d_{j,k}\psi_{j,k}(t)\right], \tag{2.92}$$

por la propiedad de igualdad polinomial,

$$\begin{aligned} c_{j,k} &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{j,k}^{(l)}\ c_{j+1,l}, && (2.93) \\ d_{j,k} &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_{j,k}^{(l)}\ c_{j+1,l}, && (2.94) \end{aligned}$$

esto equivale a procesar la señal a través de un par de filtros de análisis: el filtro

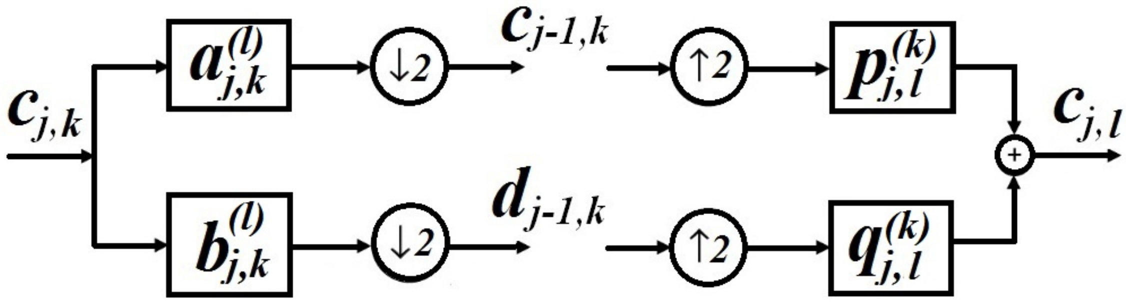


Figura 2.5: Diagrama del proceso de análisis y síntesis[19].

pasa-bajas $a^{(l)}_{j,k}$ y el filtro pasa-altas $b^{(l)}_{j,k}$. Posteriormente, a la subseñal se le realiza una reducción de muestreo usando un factor de dos. Dicho proceso se muestra en la Fig. 2.5[19].

La ecuación de síntesis se obtiene sustituyendo las relaciones de las ecs.(2.84) y (2.85) en la parte derecha de la ec.(2.91), esto es

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{j+1,l}\varphi_{j+1,l}(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[c_{j,k}p^{(k)}_{j+1,l} + d_{j,k}q^{(k)}_{j+1,l}\right]\varphi_{j+1,l}(t), \tag{2.95}$$

por la propiedad de igualdad polinomial,

$$c_{j+1,l} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[c_{j,k}p^{(k)}_{j+1,l} + d_{j,k}q^{(k)}_{j+1,l}d_{j,k}\right], \tag{2.96}$$

lo que corresponde a aplicar un aumento en el muestreo usando un factor de dos antes de la convolución, dicho proceso se ilustra en la Fig. 2.5[19].

2.12.1. Análisis multiresolución 2D

Para poder extender el análisis multiresolución a señales bidimensionales[8], se construye un subespacio de escalamiento V_j^2 mediante

$$V_j^2 = V_j \otimes V_j, \tag{2.97}$$

la función de escalamiento Φ es descrita como

$$\Phi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y), \tag{2.98}$$

y el subespacio V_j^2 es generado por

$$\beta_{V_j^2} = \{\Phi_{j,k,m}(x, y)|k, m \in \mathbb{Z}\}, \tag{2.99}$$

donde

$$\Phi_{j,k,m}(x, y) = \varphi_{j,k}(x)\varphi_{j,m}(y). \tag{2.100}$$

El subespacio W_j^2 es el complemento ortogonal de V_j^2, dado por

$$V_{j+1}^2 = V_j^2 \oplus W_j^2, \tag{2.101}$$

para $j \in \mathbb{Z}$. En S.G. Mallat[27] se establece que W_j^2 tiene como base ortonormal

$$\beta_{W_j^2} = \left\{\Psi_{j,k,m}^{(1)}, \Psi_{j,k,m}^{(2)}, \Psi_{j,k,m}^{(3)}|k, m \in Z\right\}, \tag{2.102}$$

donde

$$\Psi^{(1)}_{j,k,m}(x,y) = \varphi_{j,m}(x)\psi_{j,m}(y), \tag{2.103}$$

$$\Psi^{(2)}_{j,k,m}(x,y) = \psi_{j,m}(x)\varphi_{j,m}(y), \tag{2.104}$$

$$\Psi^{(3)}_{j,k,m}(x,y) = \psi_{j,m}(x)\psi_{j,m}(y). \tag{2.105}$$

Usando el hecho que $V_{j+1} = V_j \otimes W_j$ (ec.(2.79)) en la ec.(2.101), se obtiene

$$\begin{aligned} V_{j+1}^2 &= V_{j+1} \otimes V_{j+1} \\ &= (V_j \oplus W_j) \otimes (V_j \oplus W_j) \\ &= \Big((V_j \oplus W_j) \otimes V_j\Big) \oplus \Big((V_j \oplus W_j) \otimes W_j)\Big) \\ &= (V_j \otimes V_j) \oplus (V_j \otimes W_j) \oplus (W_j \otimes V_j) \oplus (W_j \otimes W_j) \\ &= V_j^2 \oplus \underbrace{[(V_j \otimes W_j) \oplus (W_j \otimes V_j) \oplus (W_j \otimes W_j)]}_{W_j^2}, \end{aligned} \tag{2.106}$$

esto es, la ec.(2.106) divide la señal en dimensión dos en cuatro subseñales diferentes[8]:

- Subseñal LL: contiene las bajas frecuencias horizontales y verticales de la señal. La subseñal pertenece al subespacio $V_j \otimes V_j$, dicho subespacio es generado por $\Big\{\Phi_{j,k,m}(x,y)|k,m \in \mathbb{Z}\Big\}$.
- Subseñal LH: contiene las bajas frecuencias horizontales y las altas frecuencias verticales de la señal. La subseñal pertenece al subespacio $V_j \otimes W_j$, que es generado por $\Big\{\Psi^{(1)}_{j,k,m}(x,y)|k,m \in \mathbb{Z}\Big\}$.
- Subseñal HL: contiene las altas frecuencias horizontales y las bajas frecuencias verticales de la señal. La subseñal pertenece al subespacio $W_j \otimes V_j$, generado

por $\left\{\Psi^{(2)}_{j,k,m}(x,y)|k,m\in\mathbb{Z}\right\}$.

- Subseñal HH: contiene las altas frecuencias horizontales y verticales de la señal. La subseñal pertenece al subespacio $W_j \otimes W_j$, dicho subespacio se genera por $\left\{\Psi^{(3)}_{j,k,m}(x,y)|k,m\in\mathbb{Z}\right\}$.

2.13. La transformada de Radon

El matemático austriaco Johann Radon (l887-1956) escribió un artículo clásico en 1917, *"Über die Bestimmung Funktionen von durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten"* (que trata sobre la determinación de funciones a partir de sus integrales a lo largo de ciertas variedades)[32]. Este trabajo constituye el fundamento de la conocida en la actualidad como transformada de Radon. El problema de la determinación de una función $f(x,y)$ a partir de sus integrales de línea (en el caso de dimensión dos) o una $f(x,y,z)$ a partir de integrales en el plano (en el caso de dimensión tres), surge en una diversidad de campos: imágenes médicas, astronomía, cristalografía, microscopía electrónica, geofísica, óptica y ciencia de los materiales. En dichas aplicaciones el objetivo principal es obtener información sobre la estructura interna del objeto mediante la propagación de una onda (rayos X, rayos gamma, luz visible, electrones, neutrones u ondas de sonido). Al problema de conocer la estructura interna de un objeto usando las observaciones de las proyecciones se le ha denominado "reconstrucción por proyecciones". La transformada de Radon y su inversa forman el marco teórico para la resolución de ésta clase de problemas.

2.13.1. La transformada de Radon 2D

Para una función $f(x,y)$, su transformada de Radon está definida como

$$\mathcal{R}\{f(x,y)\} = \int_L f(x,y)ds, \tag{2.107}$$

donde L es cualquier línea recta en el plano $\mathbb{R}^2$ y ds es la longitud del arco a lo largo de L, Fig. 2.6.

Si P es una recta que pasa por el origen y es perpendicular a L, θ es el ángulo que forma la recta P con el eje horizontal, entonces al rotar los ejes de coordenadas de forma que el eje horizontal sea la recta P y el eje vertical sea paralelo a la recta L, Fig. 2.7, se tiene que en el nuevo sistema de coordenadas es

$$x = p\ cos\theta - s\ sen\theta, \tag{2.108}$$

$$y = p\ sen\theta + s\ cos\theta, \tag{2.109}$$

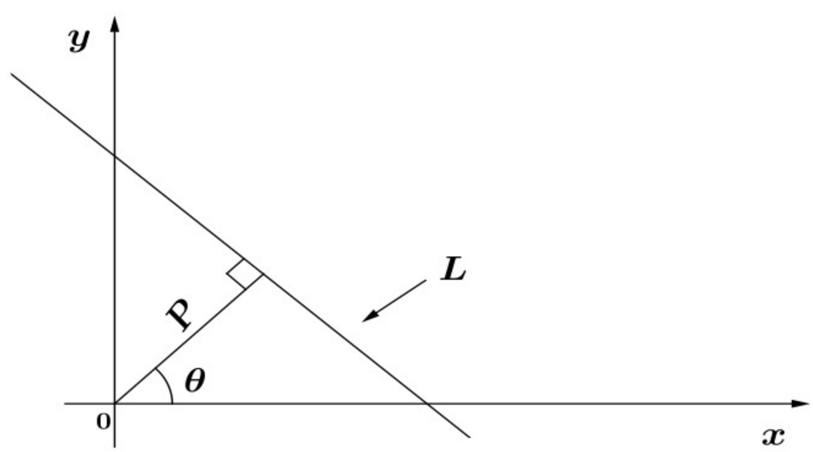


Figura 2.6: Recta L en el plano.

por lo que la transformada de Radon se reescribe en término de los parámetros p y θ como

$$R(p,\theta) = \mathcal{R}\{f(x,y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(p\ cos\theta - s\ sen\theta, p\ sen\theta + s\ cos\theta) ds, \tag{2.110}$$

donde $-\infty < p < \infty$, $0 \leq \theta < \pi$[13, 17]. Debido a su practicidad, la transformada de Radon se define usando la función delta de Dirac, como

$$R(p,\xi_1,\xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(p - x\ \xi_1 - y\ \xi_2) dx\ dy, \tag{2.111}$$

con $p = \boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{r}$, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\xi_2) = (cos\theta, sen\theta)$, $\mathbf{r} = (x,t)$; para un ángulo fijo θ se dice que $R(p,\theta)$ es una muestra de la transformada de Radon.

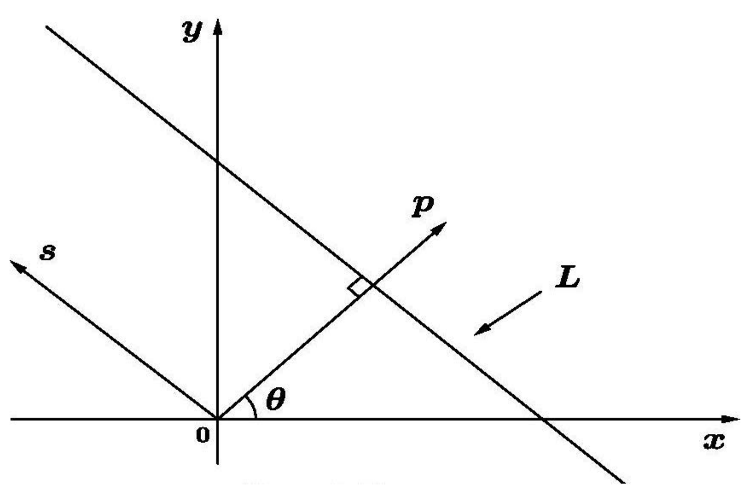


Figura 2.7: Cambio de coordenadas para la transformada de Radon.

2.14. Propiedades de la transformada de Radon

Todas las demostraciones de las propiedades de la transformada de Radon se encuentran en L. Debnath y D. Bhatta[13].

2.14.1. Linealidad

Para las funciones bidimensionales f, g, se tiene que

$$\mathcal{R}\{a_1 f(x,y) + a_2 g(x,y)\} = a_1 \mathcal{R}\{f(x,y)\} + a_2 \mathcal{R}\{g(x,y)\}, \tag{2.112}$$

para a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$.

2.14.2. Similaridad

Para $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\mathcal{R}\{f(ax,by)\} = R\left(p, \frac{\xi_1}{a}, \frac{x_2}{b}\right). \tag{2.113}$$

2.14.3. Simetría

$$R\left(-p, -\xi_1, -x_2\right) = R\left(p, \xi_1, x_2\right), \tag{2.114}$$

2.14.4. Traslación

Para $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\mathcal{R}\{f(x-a, y-b)\} = R\left(p - a\xi_1 - b\xi_2, \xi_1, x_2\right). \tag{2.115}$$

2.14.5. La transformada de Radon en coordenadas polares

En este trabajo de tesis se tiene que en algunos casos el BSR no es paralelo al fondo marino, sino que presenta un ángulo de inclinación, por lo que se utiliza la propiedad de rotación de la transformada de Radon, pero dicha propiedad se maneja más fácilmente en coordenadas polares[51], para esto en la ec.(2.111) se utilizan los cambios de variables $x = r\ cos\phi$ y $y = r\ sen\phi$, quedando como

$$\mathcal{R}\{f(r,\phi)\} = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} f(r,\phi)\delta(p - rcos\phi\ \xi_1 - rsen\phi\ \xi_2)|r|dr\ d\phi, \tag{2.116}$$

con $\xi_1 = cos\theta$ y $\xi_2 = sen\theta$, además usando la identidad trigonométrica $cos(\alpha - \beta) = cos\alpha cos\beta + sen\alpha sen\beta$, la ec.(2.116) se simplifica a

$$R(p,\theta,\phi) = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} f(r,\phi)\delta(p - r\ cos\,(\theta - \phi))\,|r|\ dr\ d\phi. \tag{2.117}$$

2.14.6. Propiedad de rotación

Si rotamos la función $f(x,y)$ un ángulo θ_0, la transformada de Radon también será afectada en el parámetro θ la misma cantidad. Para ello se reescribe a la función $f(x,y)$ en coordenadas polares $f(r,\phi)$, por lo que

$$\mathcal{R}\{f(r,\phi+\theta_0)\} = R(p,\theta,\phi+\theta_0) = R(p,\theta+\theta_0,\phi), \tag{2.118}$$

propiedad muy útil en procesamiento de señales bidimensionales, ya que una rotación θ_0 en la señal $f(x,y)$ implica un desplazamiento horizontal en la dirección θ.

2.14.7. El teorema de la rebanada de Fourier

Sea θ fijo en la transformada de Radon $R(p, \theta)$ de la función $f(x, y)$, ec.(2.110). La transformada de Fourier de $R(p, \theta)$ está dada por

$$\mathcal{F}\left\{R(p, \theta)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} R(p, \theta) e^{-i\omega p} dp, \tag{2.119}$$

usando la definición de transformada de Radon dada en la ec.(2.111), obtenemos

$$\mathcal{F}\left\{R(p, \theta)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(p - x\ cos\theta - y\ sen\theta) dxdy \right\} e^{-i\omega p} dp, \tag{2.120}$$

por lo tanto,

$$F(\omega \cdot cos\theta, \omega \cdot sen\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(x\omega \cdot cos\theta + y\omega \cdot sen\theta)} dxdy, \tag{2.121}$$

que es la transformada de Fourier 2D evaluada en el punto específico $(\omega \cdot cos\theta, \omega \cdot sen\theta)$. A la ec.(2.121) se le conoce como **la rebanada de Fourier**[28]. El teorema de la rebanada de Fourier da pie a calcular la transformada de Radon vía la transformada de Fourier, por lo que se puede usar la transformada rápida de Fourier para obtener la transformada rápida de Radon. La otra relevancia del teorema es que nos proporciona un camino para calcular la transformada inversa de Radon.

Capítulo 3

Reconocimiento de Patrones

El proceso de reconocimiento de patrones en señales digitales consta de tres pasos: la adquisición de los datos, la extracción de características o atributos y la clasificación de los objetos, Fig. 3.1.

3.1. Adquisición de datos

La adquisición de datos puede llevarse a cabo mediante el uso de sensores, los cuales son dispositivos capaces de detectar magnitudes físicas o químicas (Tabla 3.1) y convertirlas a información digital. Cámaras, micrófonos, termómetros y electrodos son algunos ejemplos de sensores utilizados en distintas áreas para proveer información a sistemas digitales de reconocimiento de patrones[3].

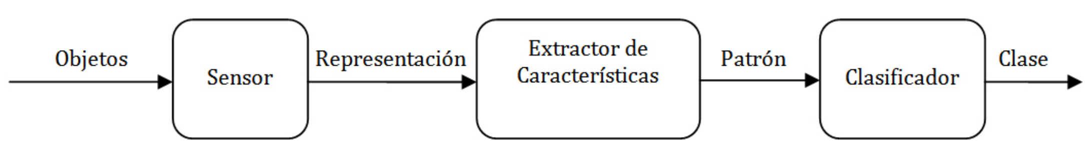


Figura 3.1: Esquema del proceso de reconocimiento de patrones.

3.2. Extracción de características o atributos

Tabla 3.1: Algunas magnitudes físicas medidas a través de sensores.

Magnitud	Sensor
Luz (visible, infrarroja, ultravioleta).	Fotoresistores, fotodiodos, cámaras.
Sonido y ultrasonido.	Micrófono, rangers ultrasónicos.
Gravedad.	Acelerómetros, giróscopos.
Temperatura.	Termistores, diodos, pirosensores, termoresistencias.
Humedad.	Sensores capacitivos o resistivos.
Presión.	Sensores de contacto, microenterruptores, piel robotica.
Velocidad.	Tacómetros.
Magnetismo.	Brújulas eléctricas, interruptores magnéticos.
Ubicación.	GPS.
Proximidad.	Sensores capacitivos e inductivos.
Distancia.	Medidores de distancia ultrasónicos o por haz infrarrojo.

Otra tarea esencial del proceso de reconocimiento de patrones es la extracción de características o atributos. Mediante las características o atributos, se puede representar al objeto y describirlo matemáticamente con el fin de obtener información cuantitativa, única, completa, que muestre la esencia del objeto[20]. Un ejemplo de esto se da en el procesamiento de señales acústicas, electrocardiogramas, encefalogramas, sismogramas y otras señales sinusoidales, en donde la extracción de características se realiza mediante diferentes técnicas, algunas de ellas incluyen la descomposición de la señal en ondas sinusoidales utilizando la transformada de Fourier y/o la transformada de ondícula (*wavelet*). Dichas características pueden pertenecer al dominio temporal, espacial y/o de frecuencias[15]. El conjunto de ellas ofrece información que permite representar y describir la señal como una entidad única y discriminante, es decir, que puede distinguirse de entre otras señales. Algunas de las características más comúnmente usadas en el reconocimiento de patrones en señales discretas en 1D se describen a continuación.

3.2.1. Taza de cruce por cero

La taza de cruce por cero representa el número de veces que la señal $\mathbf{x} = (x_0, x_2, \cdots, x_{N-1})$ cruza el eje horizontal. Primordialmente se utiliza para calcular el ruido de una señal, y se define mediante,

$$Z = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} |g(x_k) - g(x_{k-1})|, \tag{3.1}$$

donde g es la función signo dada por

$$g(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_k \geq 0, \\ -1, & \text{si } x_k < 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

3.2.2. Periodicidad

La periodicidad de una señal $\mathbf{x} = (x_0, x_2, \cdots, x_{N-1})$ se calcula mediante la función de autocorrelación,

$$R_j = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot x_{k-j}, \tag{3.3}$$

para $j = 0, \cdots, N-1$. Dicha ecuación representa la similitud de la señal con respecto a ella misma, por lo que se utiliza para eliminar ruido, ya que se supone que éste es no periódico.

3.2.3. Espectro de frecuencia

El espectro de frecuencia para una señal $\mathbf{x} = (x_0, x_2, \cdots, x_{N-1})$, es la distribución de amplitudes para cada frecuencia. En general el concepto de descomposición frecuencial se basa en el hecho de que el conjunto de todas las funciones seno y coseno forman una base del espacio vectorial de funciones continuas y absolutamente integrables en el plano. El espectro de frecuencia se obtiene mediante la transformada discreta de Fourier de la señal

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{\mathbf{x}\} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi \frac{k\omega}{N}}, \tag{3.4}$$

para $\omega = 0, \cdots, N-1$ y el espectro de amplitud es la magnitud de cada componente del espectro, esto es

$$A_k = |F(\omega)| = \sqrt{\Re e^2(F(\omega)) + \Im mag^2(F(\omega))}, \tag{3.5}$$

donde $k = 0, \cdots, N-1$; $\Re e(\cdot)$ e $\Im mag(\cdot)$ son la parte real e imaginaria del escalar complejo dado (ver sección 2.6). En los sistemas de clasificación de patrones, se utiliza el espectro de amplitud para comparar dos señales, inclusive si una de ellas está trasladada en el dominio espacial, ya que los espectros de amplitud de dichas señales son iguales.

3.2.4. Amplitud

La amplitud es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de la primera mitad del espectro de amplitud, esto es

$$A = \sqrt{\sum_{k=0}^{\lfloor (N-1)/2 \rfloor} A_k^2}. \tag{3.6}$$

donde A_k está dada por la ec.(3.5) y $\lfloor \cdot \rfloor$ es la función piso para escalares reales. En ondas sonoras la amplitud de la señal está asociada al volumen y para señales sísmica provee información acerca de cambios litológicos.

3.2.5. Espectro de energía

El espectro de energía, también conocido como función de densidad de energía espectral (D), es la medida que nos indica cómo está distribuida la energía de una señal sobre las distintas frecuencias de las que está formada. Se calcula mediante el cuadrado de las componentes en el espectro de amplitud A_k, ec.(3.5), como

$$D_k = A_k^2, \tag{3.7}$$

para $k = 0, \cdots, N-1$[22].

3.2.6. Energía

La energía de una señal discreta se calcula mediante la suma del cuadrado de las amplitudes de sus componentes, ec.(3.5), o mediante la suma de los elementos del espectro de energía, ec.(3.7), es decir

$$E_k = \sum_{k=0}^{N-1} A_k^2 = \sum_{k=0}^{N-1} D_k, \tag{3.8}$$

cuando se trabaja con señales acústicas, la energía es útil para detectar los segmentos en silencio y los sonoros.

3.3. Clasificación

Existe un extenso conjunto de técnicas de clasificación. Todas las técnicas del reconocimiento de patrones asumen que N características han sido extraídas y que éstas fueron normalizadas de manera tal que se organizan en el mismo espacio de medidas. Las características o atributos para un objeto se representan en un espacio N-dimensional que se conoce como patrón[35, 37]. El resultado del proceso de clasificación es una decisión sobre la clase a la que pertenece el objeto. Cada objeto se reconoce como perteneciente a un tipo particular y se asigna a una clase dentro de un conjunto de clases que representan a todos los tipos de objetos que se espera que existan.

3.4. Tipos de técnicas de clasificación

Las técnicas de clasificación que pueden llevarse a cabo son de dos tipos:

3.4.1. Supervisada

Se usa un conjunto de aprendizaje que sirve para entrenar al sistema. Las clases son de naturaleza determinística, es decir, se tiene un vector que representa a

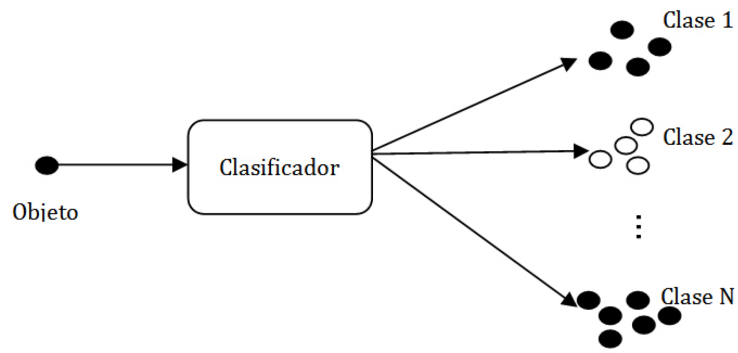


Figura 3.2: Clasificación supervisada.

todos los objetos de una clase, al cual se le conoce como vector prototipo (Fig. 3.2); además, toda la información necesaria y suficiente para su diseño se encuentra disponible de antemano. Los algoritmos propuestos en la clasificación supervisada, usualmente operan sobre la información proporcionada por un conjunto de patrones o prototipos de entrenamiento que son representantes de las clases, estos poseen una etiqueta de clase correcta. Al conjunto de prototipos etiquetados como correctos se le llama conjunto de entrenamiento y es el que se utiliza para la clasificación de las muestras[35].

3.4.2. No supervisada

Si no se tiene un conjunto de entrenamiento, entonces se necesita un análisis previo de los datos, a lo cual se le conoce como clasificación no supervisada, aprendizaje no supervisado o técnicas de agrupamiento (clustering). El propósito de los métodos de agrupamiento es analizar y extraer la estructura en un conjunto de muestras de entrenamiento y de esa manera clasificar objetos en grupos, de forma tal que posean un alto grado de semejanza (Fig. 3.3).

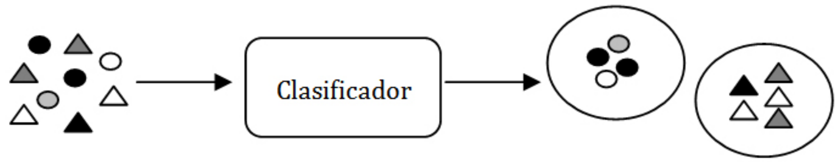


Figura 3.3: Clasificación no supervisada.

3.5. Enfoques de clasificación

Los cuatro enfoques más utilizados para realizar tareas de clasificación en sistemas de reconocimiento de patrones son: modelos de comparación (*template matching*), clasificación estadística, clasificación estructural o sintáctica y redes neuronales, Tabla 3.2[20, 23]. Dichos modelos no son necesariamente independientes y en algunos casos se han realizado sistemas híbridos de clasificación.

3.5.1. Modelo de comparación

El modelo de comparación es uno de los primeros y más simples enfoques para reconocimiento de patrones, se basa en la comparación entre los objetos en el conjunto

Tabla 3.2: Enfoques de clasificación[23].

Enfoque	Representación	Función de reconocimiento	Criterio típico
Comparación	Muestras, pixeles, curvas	Correlación, medida de distancia	Error de clasificación
Estadístico	Características	Función de discriminación	Error de clasificación
Sintáctico	Primitivas	Reglas, gramática	Error de aceptación
Red neuronal	Muestras, pixeles, curvas	Función de red	Error cuadrado medio

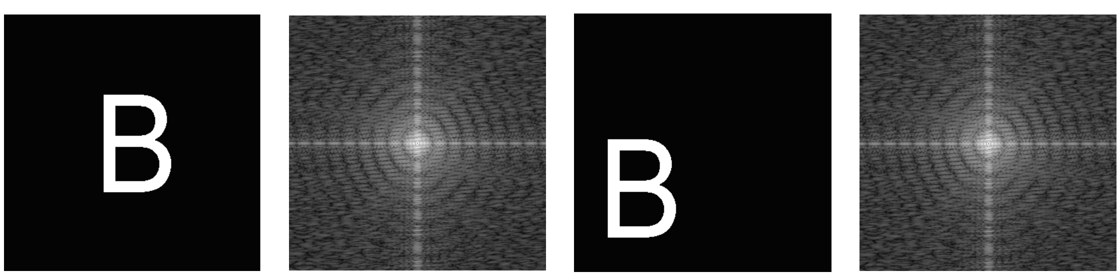
de entrenamiento y los objetos de estudio. El modelo de comparación se fundamenta en las funciones de correlación, debido a que éstas nos permiten establecer el grado de semejanza que el objeto de estudio tiene con el objeto de referencia[11, 20].

Si se tienen dos señales finitas f y g, la función de correlación 1D entre éstas está dada por

$$C(f,g) = \sum_{k=0}^{M-1} f(k)g(x+k), \tag{3.9}$$

para $x = 0, \ldots, M-1$.

En la actualidad se manejan sistemas de reconocimiento de patrones que utilizan el modelo de comparación por correlación y que ofrecen invariancias a posición, rotación y escala. La invariancia a traslación se obtiene de manera rápida y sencilla aprovechando que el módulo de la transformada de Fourier de una señal es invariante a traslación, Fig. 3.4.



(a) (b) (c) (d)

Figura 3.4: Ejemplo del invariante a traslación usando los espectros de amplitud. (a) Imagen I_1: la letra A en formato Arial sin ninguna transformación geométrica. (b) $A_1(u,v) = |\mathcal{F}\{I_1(x,y)\}|$. (c) Imagen I_2: la letra A en formato Arial desplazada con respecto al centro de la imagen. (d) $A_2(u,v) = |\mathcal{F}\{I_2(x,y)\}|$.

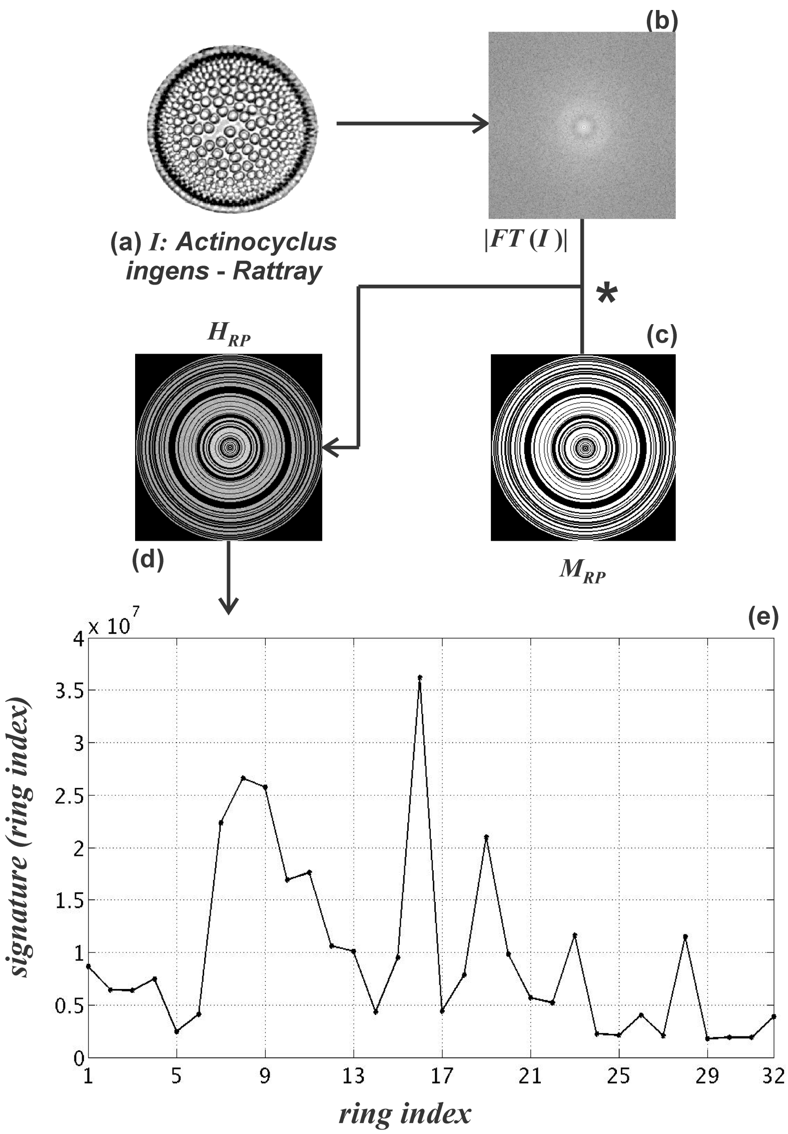


Figura 3.5: Ejemplo del procedimiento para construir una firma 1D, Fig.3 de [46].

El invariante a escala se ha obtenido con la transformada analítica de Fourier-Mellin normalizada, dicha transformación ha demostrado ser mejor que la transformada de Fourier-Mellin o la transformada de escala al no ponderar las frecuencias y al no tener el factor $\frac{1}{\mathbf{r}}$, que origina una singularidad en el centro de la imagen donde $\mathbf{r} = 0$[14, 46, 47]. La invariancia a rotación es un proceso más complicado, para el cual se han propuesto soluciones como por ejemplo utilizar máscaras binarias de anillos concéntricos[2, 41, 43–45]. Al filtrar el módulo de la transformada de Fourier de las imágenes con las máscaras binarias de anillos concéntricos, se obtienen firmas 1D que caracterizan a las imágenes, Fig. 3.5.

La comparación entre las firmas se lleva a cabo a través de la función de correlación no lineal

$$C_{NL}(f,g) = |\mathcal{F}\{g\}|^k \, e^{i\phi} \, |\mathcal{F}\{f\}|^k \, e^{-i\varphi}, \tag{3.10}$$

donde ϕ y φ representan la fase de la transformada discreta de Fourier de g y f, respectivamente; $0 < k < 1$ es el coeficiente de no linealidad. Los análisis realizados indican que los sistemas son independientes del valor de k, sin embargo para fines de clasificación a tiempo real, el tiempo de cómputo que utilizan es alto y limita su aplicación práctica[2, 41, 43, 45]. Debido a esto, se ha estado desarrollado una metodología donde se construye un sólo espacios de clasificación, en vez de los M-planos de salida (donde M es el número de elementos en la base de datos de imágenes de referencia)[46, 47, 51]. Otra técnica que utiliza el enfoque de clasificación por comparación es la que utiliza la distancia euclidiana mínima, aquí se determina la similitud que cada clase guarda con el vector prototipo usando el hecho de que las distancias menores implican mayor similitud[20, 35].

3.5.2. Clasificación estadística

Este enfoque se basa en la suposición de que se tiene un conjunto de medidas numéricas con distribuciones de probabilidad conocidas y a partir de ellas se hace el reconocimiento[20, 37]. Una de las tareas de este modelo es la de elegir las características que permitan que las diferentes clases ocupen regiones compactas y separadas en un espacio de atributos N-dimensional (Fig. 3.6)[38]. Dado ese espacio de atributos, el objetivo es establecer las fronteras que separan a los patrones de distintas clases, para después determinar las distribuciones de probabilidad de que un patrón dado pertenezca a cada clase[23].

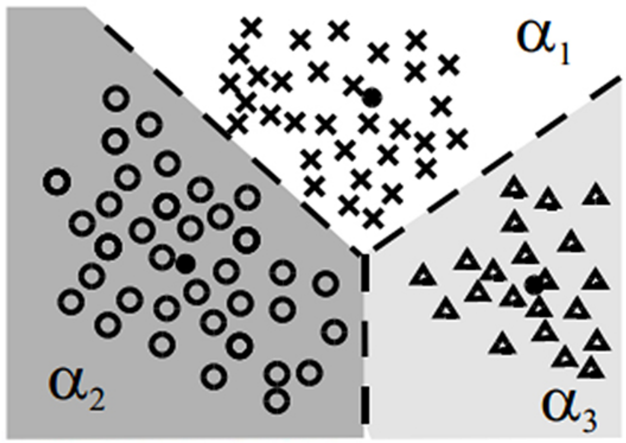


Figura 3.6: Espacio de atributos y fronteras entre clases.

3.5.3. Clasificación sintáctica

En este enfoque se busca encontrar las relaciones estructurales que guardan los objetos de estudio, utilizando la teoría de lenguajes formales. El objetivo es construir una gramática que describa la estructura del universo de objetos[37]. En muchos problemas de clasificación que involucran patrones complejos, es más apropiado adoptar una perspectiva jerárquica donde un patrón es visualizado como un conjunto de subpatrones que a su vez están compuestos por subpatrones más simples. El subpatrón más simple o elemental es llamado primitiva y el patrón complejo es representado en términos de la interrelación que existe entre esas primitivas. De esa forma, se establece una analogía formal entre la estructura de los patrones y la sintáxis de un lenguaje[23, 38]. Un ejemplo de esto sería diagnosticar alguna anomalía en el ritmo cardiaco en las mediciones de electroencefalogramas (EEG). Si a la forma de la onda de un EEG se le aproxima con segmentos lineales (primitivas), entonces a través de las gramáticas formales construidas a partir de las primitivas, se podría determinar si las formas de la onda son saludables o no saludables.

3.5.4. Redes neuronales

Este enfoque trata de construir sistemas inteligentes para emular a los cerebros biológicos mediante un sistema paralelo masivo, constituido por una gran cantidad de procesadores simples e interconectados. Las redes neuronales usan principios organizacionales tales como aprendizaje, generalización, adaptabilidad, tolerancia a fallos, entre otros. La particularidad principal de este modelo radica en su habilidad de aprender las relaciones complejas, usando procedimientos de entrenamiento secuencial y adaptabilidad a los datos[23, 38]. Por su topología, las redes neuronales se clasifican en monocapa y multicapa. Existe otra manera de clasificarlas, mediante las funciones de aprendizaje: aprendizaje supervisado, no supervisado o auto organizado, híbrido y de aprendizaje reforzado.

Capítulo 4

Detección del BSR en Imágenes de Sísmica de Reflexión

4.1. Introducción a la propuesta

Este trabajo muestra cómo, con la utilización de distintas transformadas integrales, es posible realizar tareas de reconocimiento de patrones en señales sinusoidales tipo ondícula. Para ello se utiliza como ejemplo, imágenes sísmicas obtenidas a través de la técnica de reflexión. En el Apéndice A se explican las diferentes técnicas de exploración petrolera, incluyendo la adquisición, procesamiento e interpretación de los datos. También, se describen los elementos y procesos del sistema petrolero, así como la formación y características del reflector que imita la forma del reflector d del fondo marino (por sus siglas en inglés BSR).

Aprovechando el patrón que presenta el BSR generado por la presencia de hidratos de gas, en este trabajo se desarrolla un sistema digital de reconocimiento de patrones para detectar ese y otros reflectores que imitan la forma del fondo marino,

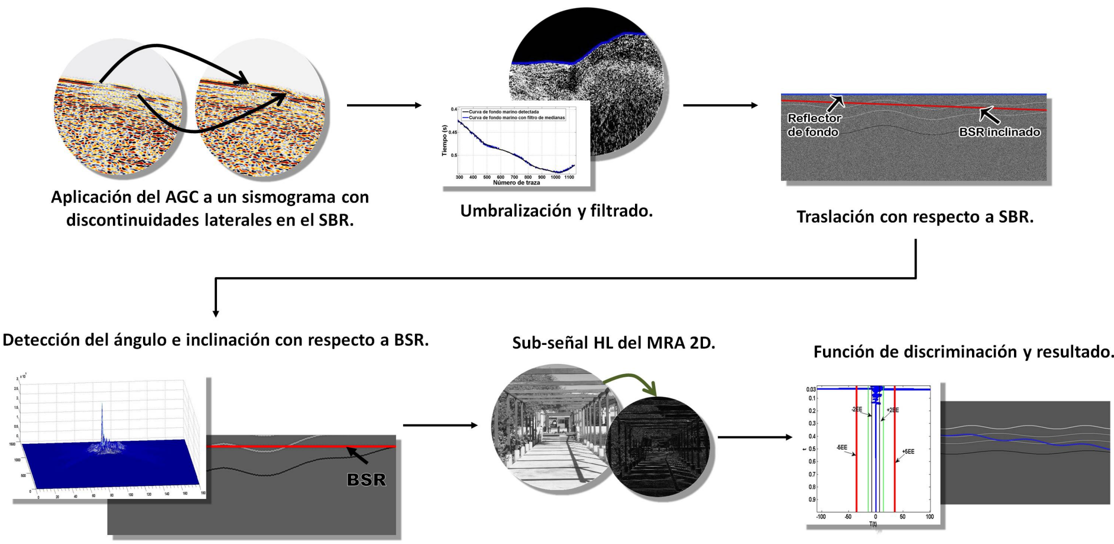


Figura 4.1: Esquema de la metodología.

de una manera automatizada y robusta. Un esquema del sistema se muestra en la Fig. 4.1, en donde se indica la secuencia de pasos necesarios para la obtención de una función que discriminará aquellos reflectores que reproducen la forma del fondo marino, sin importar el ángulo de inclinación que estos presenten. Los pasos que se llevan a cabo son: el realce de los bordes, detección de bordes, segmentación, análisis multiresolución en dimensión dos (MRA 2D), reconocimiento de patrones en imágenes sísmicas de reflexión y el uso de la transformada Radon como apoyo para la localización del BSR que presenta un ángulo de inclinación con respecto al reflector del fondo marino (por sus siglas en inglés SBR).

4.2. Preprocesamiento de la imagen sísmica

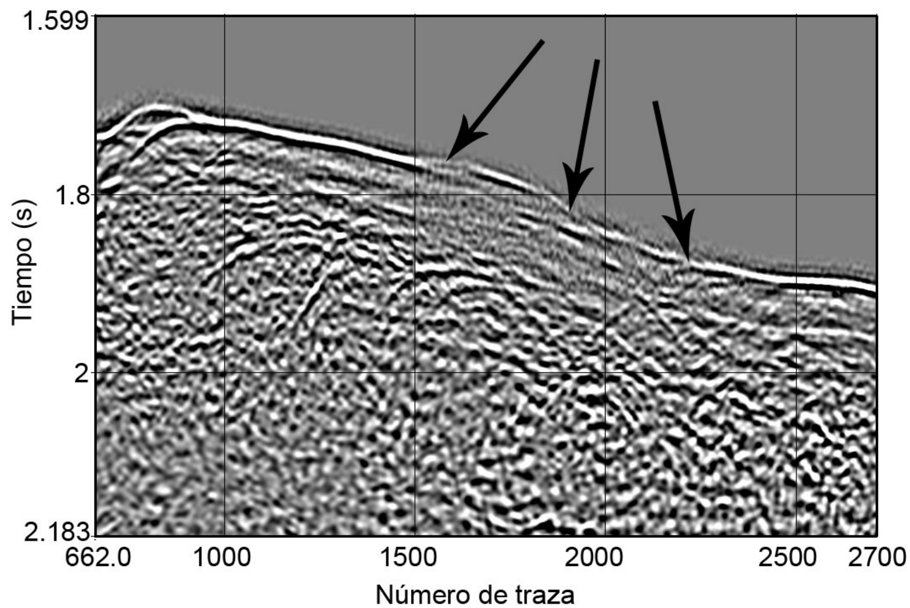
4.2.1. Control automático de ganancia

Es muy común que en imágenes de sísmica de reflexión se presenten discontinuidades laterales debido a las bajas amplitudes, a la resolución de los datos, el ruido, entre muchos otros factores. En la Fig. 4.2(a) se muestra un ejemplo de un SBR que presenta discontinuidades laterales. Una manera de reducir dichas discontinuidades es usar un proceso de ecualización, como el control automático de ganancia (por sus siglas en inglés AGC). El AGC proporciona balance entre las amplitudes verticales, con el objetivo de destacar áreas de baja amplitud o enfatizar cambios de amplitud con respecto al tiempo, dando como resultado que fases de baja amplitud bien correlacionadas sean más visibles, por lo que la imagen resultante es una imagen sísmica con continuidad lateral mejorada, como se muestra en la Fig. 4.2(b). El AGC de la muestra es el promedio de las amplitudes de la ventada utilizada, en el ejemplo de la Fig. 4.2 se utilizó una ventana de 200 milisegundos.

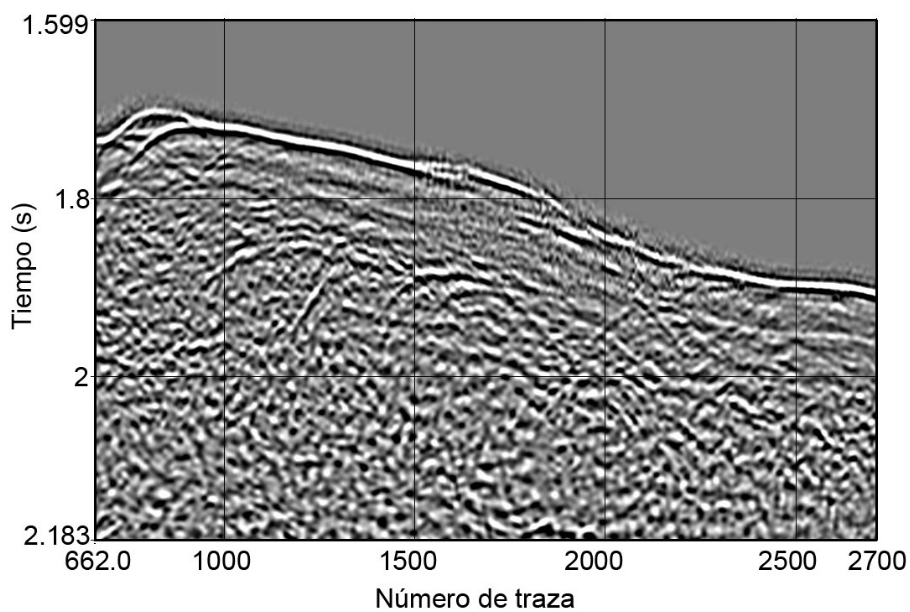
4.3. Detección y segmentación del SBR

4.3.1. Detección

Una vez que se disminuye la continuidad lateral, el siguiente paso es obtener la forma de la curva del reflector del fondo marino (por sus siglas en inglés SBR). La detección y segmentación del SBR se realiza usando un método de umbralización. Este es el método más simple de segmentación y debido a sus propiedades intuitivas es muy utilizado en aplicaciones de detección de bordes.



(a)



(b)

Figura 4.2: Preprocesamiento de la imagen sísmica mediante el AGC. (a) Discontinuidad lateral en el SBR. (b) Aplicación del AGC con una ventana de 200 milisegundos.

Para una imagen I de tamaño $M \times N$, con $M, N \in \mathbb{N}$, su imagen umbralizada $\hat{I}$ queda definida como

$$\hat{I}(x,y) = \begin{cases} 1, & |I(x,y)| \geq \tau, \\ 0, & |I(x,y)| < \tau, \end{cases} \tag{4.1}$$

donde $x = 1, \ldots M$, $y = 1, \ldots N$, $\tau \in \mathbb{R}$ es el umbral seleccionado.

Una manera simple y automatizada de definir el valor del umbral es

$$\tau = \frac{max(|I(x,y)|) + min(|I(x,y)|)}{2}, \tag{4.2}$$

es decir, τ es el punto medio entre los valores de intensidad máximo y mínimo de la imagen.

Una forma más precisa de segmentación es el proceso iterativo dado en R.C. Gonzalez y R.E. Woods[20]:

1. Usar como umbral inicial el valor calculado en la ec.(4.2).

2. De los valores de intensidad de la imagen, formar los dos conjuntos siguientes:

$$A_1 = \{(x,y) : |I(x,y)| \leq \tau, x = 1, ..., M, y = 1, ..., N\}, \tag{4.3}$$

$$A_2 = \{(x,y) : |I(x,y)| > \tau, x = 1, ..., M, y = 1, ..., N\}, \tag{4.4}$$

3. Obtener

$$\mu_k = \frac{max(|I(x,y)|) + min(|I(x,y)|)}{2}, \tag{4.5}$$

donde $(x,y) \in A_k,\ k = 1,2.$

4. Calcular un nuevo umbral τ mediante

$$\tau = \frac{\mu_2 + \mu_1}{2}. \tag{4.6}$$

5. Repetir los pasos 2 y 3 hasta que la diferencia entre el nuevo τ y el último sea menor que una tolerancia predefinida ε.

La Fig. 4.3 presenta la imagen binarizada resultante del proceso de umbralización aplicado a la Fig. 4.2(b). Obsérvese cómo se eliminan las amplitudes más bajas (como aquellas presentes arriba del reflector de fondo) y cómo se conservan las amplitudes altas (como el propio SBR).

4.3.2. Segmentación del SBR

Una vez eliminadas las reflexiones por arriba del SBR, se tiene que para cada traza sísmica $\widetilde{x}_i(t)$ el primer valor de amplitud distinto de cero corresponde al SBR, por lo tanto esto ofrece una manera sencilla de extraer la curva del reflector del fondo marino, es decir

$$S = \left\{ \left(t_0^{(i)}, \widetilde{x}_i \left(t_0^{(i)} \right) \right) \;\middle|\; i = 1, ..., N \right\}, \tag{4.7}$$

donde $t_0^{(i)} \in [0, t_n]$ es el escalar real más pequeño para el cual $\widehat{x}_i \left(t_0^{(i)} \right) \neq 0$, t_n es el último tiempo registrado en el sismograma, $\widehat{x}_i(t)$ es la columna en la imagen

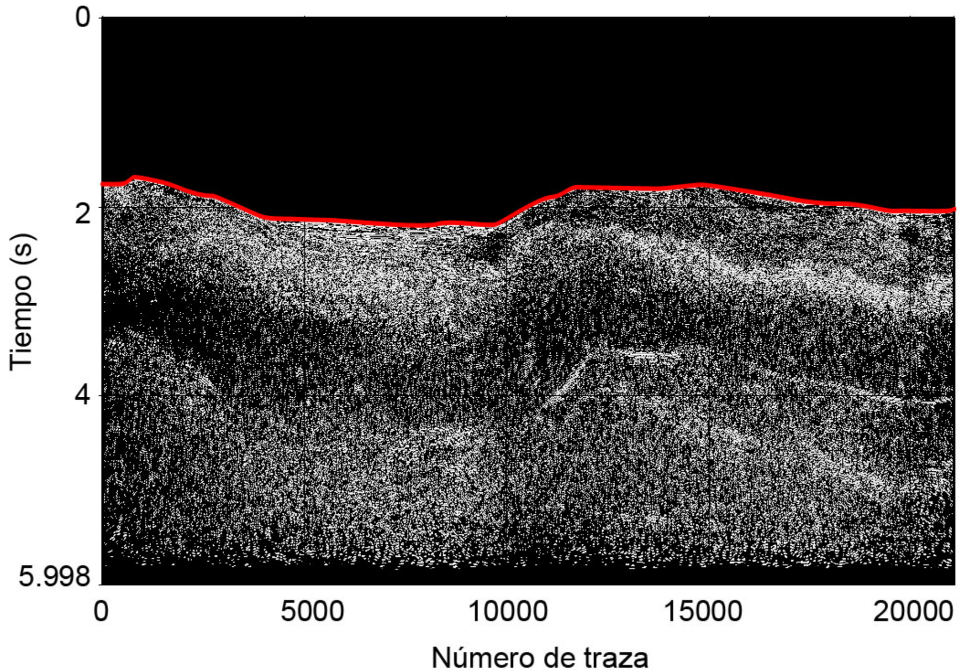
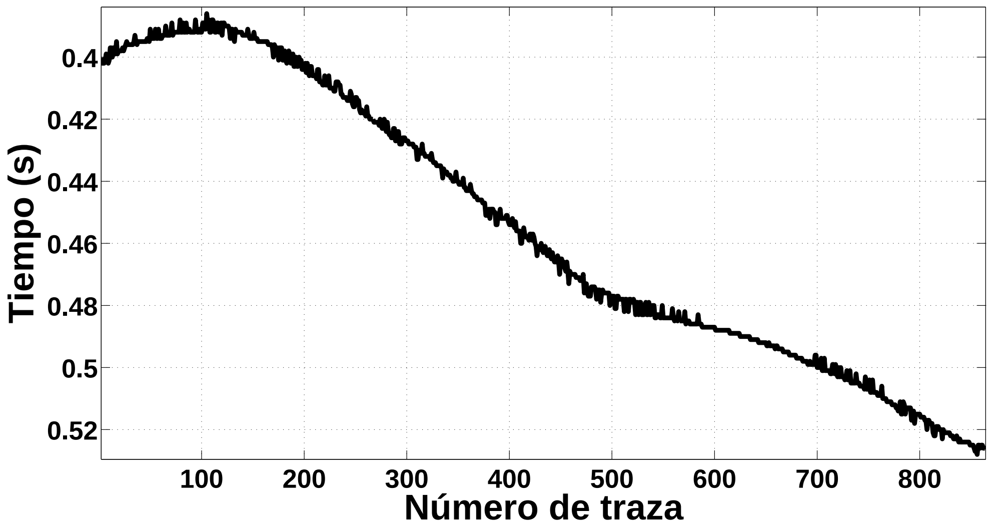


Figura 4.3: Imagen umbralizada y curva del SBR indicada en color rojo.

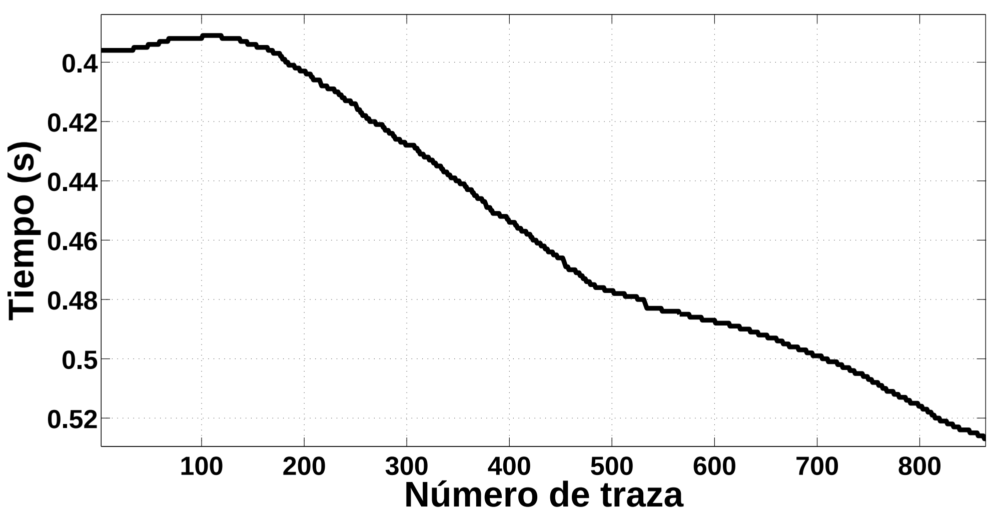
umbralizada correspondiente a la traza $\widetilde{x}_i(t)$ y N es el número de trazas de la imagen sísmica. En la Fig. 4.3 se indica el SBR detectado mediante la curva roja.

4.3.3. Eliminación del ruido en la curva del SBR

Para que la curva del SBR esté mejor definida se aplica un filtro de medianas. Este filtro reemplaza cada valor del SBR con la mediana de los valores en una ventana predeterminada. En la Fig. 4.4(a) se muestra la curva del SBR extraída de la imagen sísmica de la Fig. 4.3 y la curva procesada se presenta en la Fig. 4.4(b).



(a)



(b)

Figura 4.4: Filtro de medianas aplicado a la curva del SBR. (a) Curva detectada mediante la imagen umbralizada, Fig. 4.3. (b) Curva del SBR suavizada con un filtro de medianas.

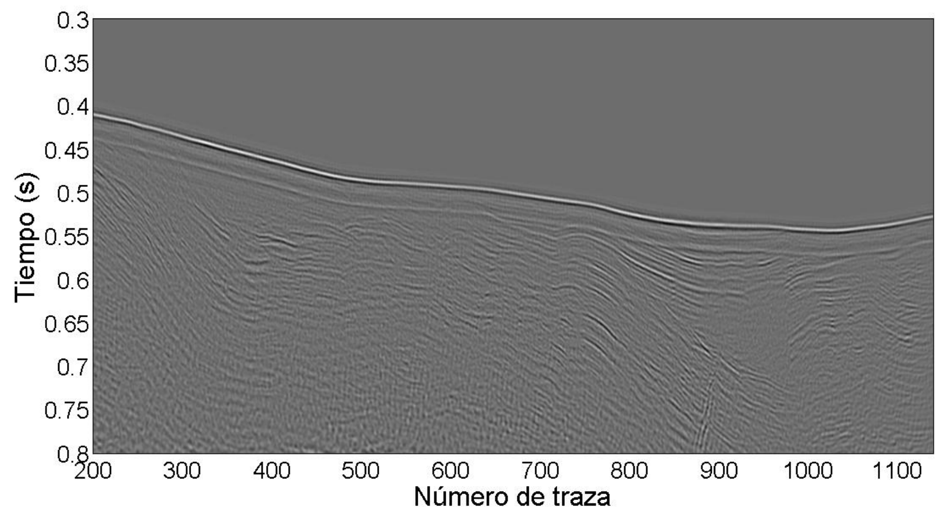
4.4. Traslación de las trazas sísmicas con respecto a los tiempos de arribo del SBR

El sistema de reconocimiento de patrones utiliza la curva del SBR como patrón de referencia a reconocer. Para poder detectar y extraer la forma del reflector del fondo marino (SBR) se ha procesado a la imagen sísmica para que el SBR tenga el primer arribo distinto de cero en la traza $\widetilde{x}_i(t)$ en el tiempo $t_0^{(i)}$, ec.(4.7). Ahora, vamos a procesar la imagen para que la curva del SBR sea transformada a una recta horizontal y por ende, todas aquellas curvas que imitan la forma del fondo marino, como es el caso del BSR, también serán rectas (paralelas al SBR o tendrán un ángulo de inclinación pero serán rectas). Para llevar a cabo dicho procesado, cada traza se traslada el correspondiente tiempo $t_0^{(i)}$, es decir

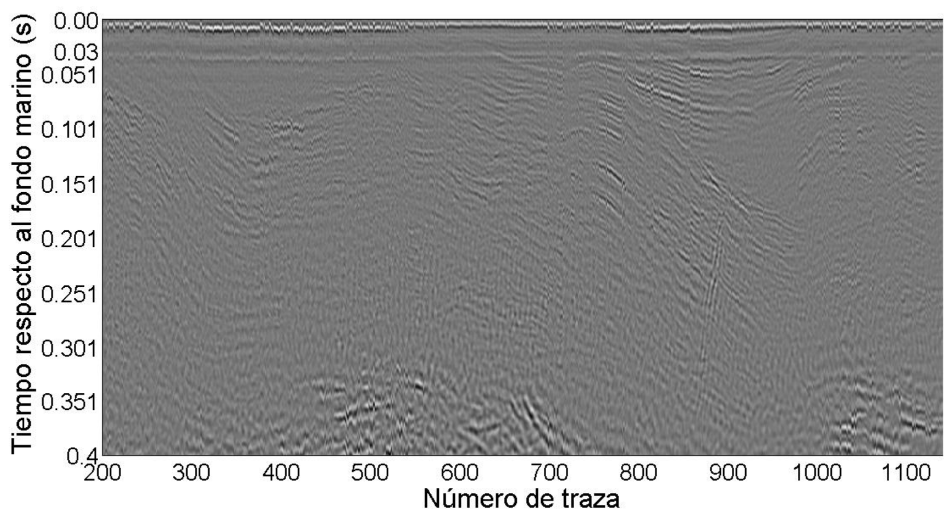
$$\widetilde{S}(i,t) = \widetilde{x}(t + t_0^{(i)}), \tag{4.8}$$

para $i = 1, ..., N$, con N siendo el número de traza en la imagen sísmica.

Por ejemplo, en la Fig. 4.5 se aprecia cómo el SBR y el BSR son transformados a rectas horizontales paralelas, ya que en este caso el BSR tiene un ángulo de inclinación de 0° con respecto al fondo. En la Fig. 4.6(a) se observa que el BSR presenta un ángulo de inclinación (de 6°) con respecto al SBR, entonces dicho reflector queda representado por una recta inclinada al aplicar la traslación de las trazas con respecto al fondo marino, Fig. 4.6(b).

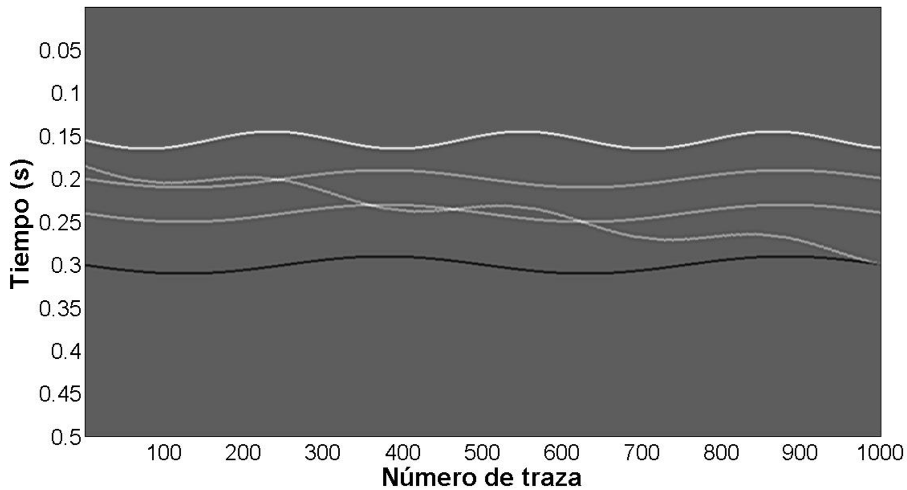


(a)

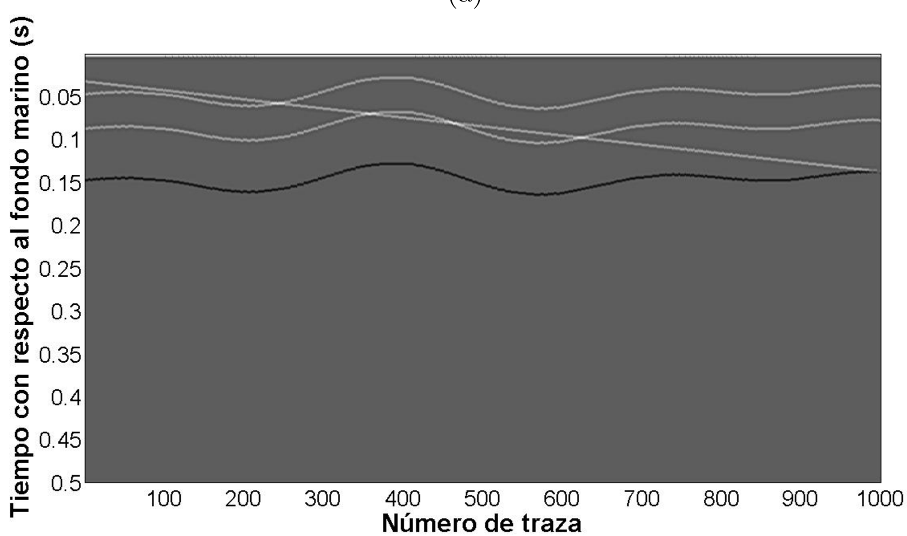


(b)

Figura 4.5: Imagen de sísmica de reflexión. (a) Imagen con BSR paralelo al fondo marino. (b) Traslación del SBR al tiempo 0 segundos.



(a)



(b)

Figura 4.6: Sismograma sintético. (a) BSR inclinado 6°. (b) Sismograma con el SBR trasladado al tiempo 0 segundos.

4.5. Cálculo del ángulo de inclinación del BSR

Para detectar al BSR es necesario conocer el ángulo de inclinación que éste presenta con respecto al SBR. En este trabajo se utiliza la transformada de Radon para tal propósito, aprovechando la propiedad de rotación que ésta posee (sección 2.14.7). Al aplicar la transformada de Radon, ec.(2.121), a la imagen sísmica de la Fig. 4.6(b), se obtiene la Fig. 4.7, donde se observan una serie de picos cuya altura depende de la longitud, el ángulo e intensidad de cada recta en el sismograma. La recta correspondiente al SBR es la que contiene los valores de mayor intensidad, por lo que la transformada de Radon produce un pico de altura máxima y debido a su naturaleza está ubicado en la muestra donde $\phi = 90°$ de inclinación. El segundo pico de mayor altura representará al BSR y estará localizado en la muestra para $\phi = \theta° \equiv \theta_{BSR}$ de inclinación, por lo que se detecta fácilmente el ángulo de inclinación del BSR con respecto al SBR haciendo

$$\theta = 90 - \theta_{BSR}. \tag{4.9}$$

Como el SBR siempre se presentará cuando $\phi = 90°$, para simplificar la identificación del ángulo de inclinación del BSR, antes de aplicar la transformada de Radon a la imagen sísmica se le elimina la recta del SBR, por lo que ahora el pico de altura máxima va a corresponder al BSR. Al realizar dicho procedimiento, en la Fig. 4.8 se observa que el pico de máxima altura está ubicado a $\theta_{BSR} = 84°$, entonces el BSR se encuentra inclinado $\theta = 90° - 84° = 6°$ con respecto al SBR. Cabe remarcar que el ángulo de inclinación utilizado en este trabajo se calcula usando el número de trazas y el número de muestras por traza.

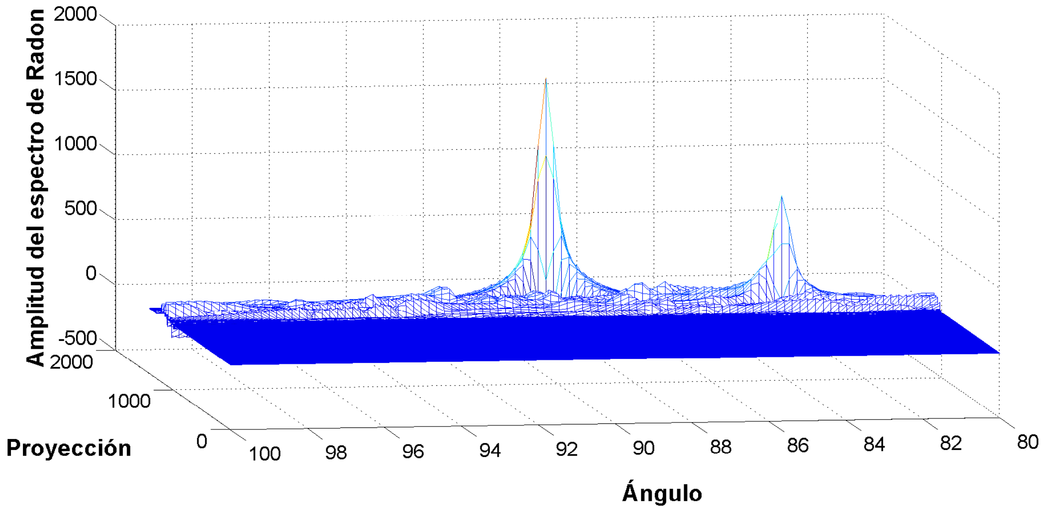


Figura 4.7: Transformada de Radon para una imagen sísmica que contiene a la recta del SBR y a la del BSR.

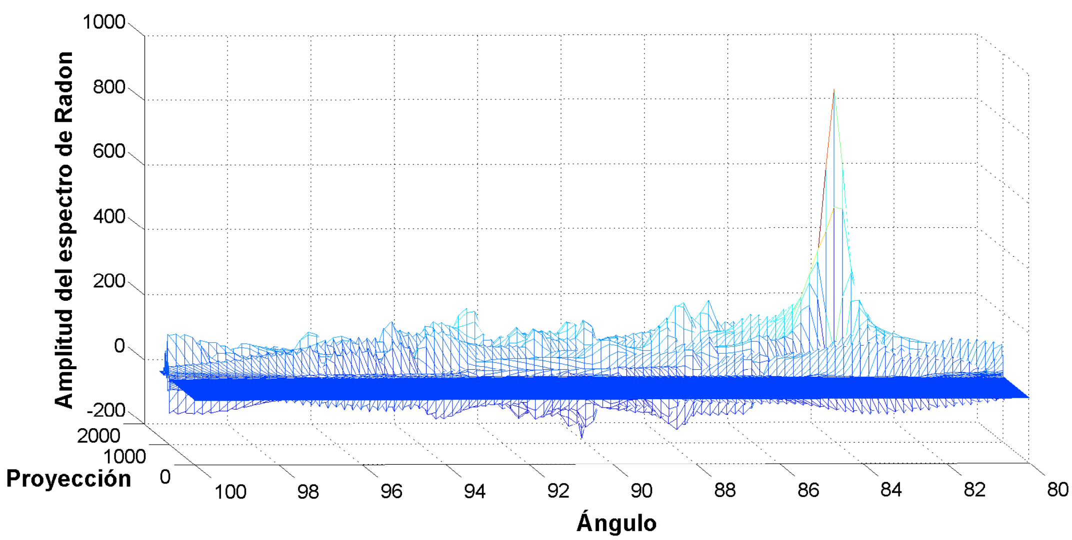


Figura 4.8: Transformada de Radon para la imagen sísmica ya eliminando la recta del SBR y dejando sólo la del BSR.

4.5.1. Rotación de la imagen sísmica un ángulo θ

Una vez determinado el ángulo de inclinación del BSR (con respecto al SBR) en la imagen sísmica, ésta se rota $\theta°$, determinados por la ec.(4.9), mediante la transformación de coordenadas

$$i' = i\ cos\theta - t\ sen\theta, \tag{4.10}$$

$$t' = i\ sen\theta + t\ cos\theta. \tag{4.11}$$

donde (i, t) es la coordenada en la imagen sísmica con el BSR inclinado, Fig. 4.6(b), y en el sistema de coordenadas (i', t') la imagen sísmica resultante presenta al BSR como una recta horizontal, Fig. 4.9.

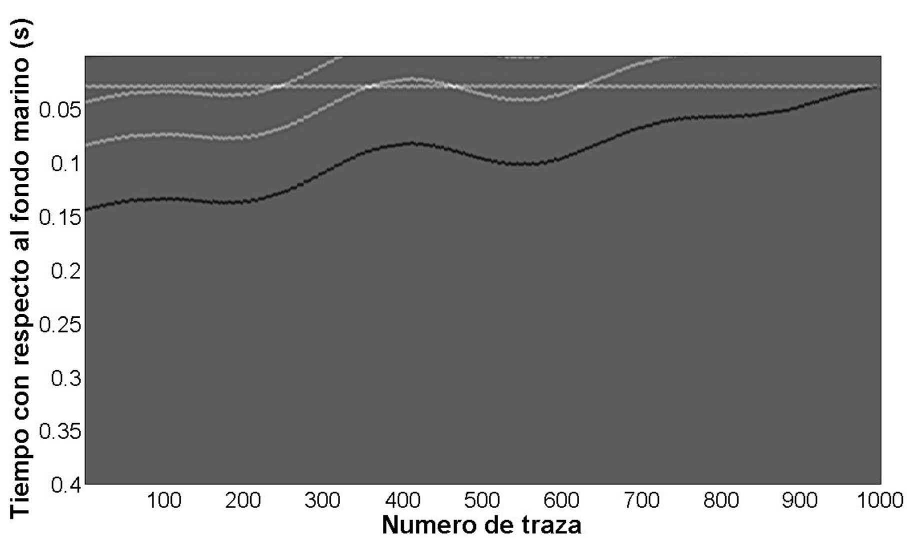


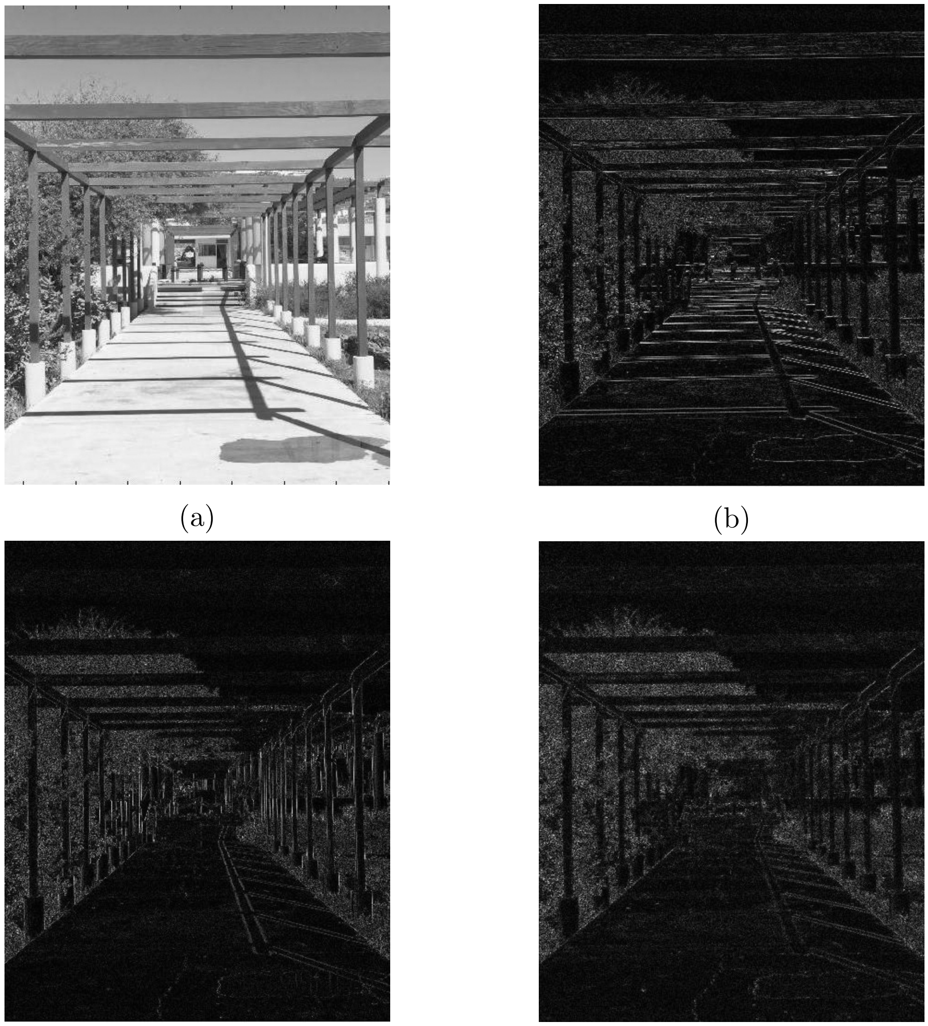
Figura 4.9: Sismograma de la Fig. 4.6(b) rotado con respecto al BSR.

4.6. Clasificación del BSR y reflectores que imitan la forma del SBR

4.6.1. Detección de rectas horizontales usando MRA 2D

Con el fin de resaltar los reflectores horizontales, que en la imagen sísmica corresponderán al BSR, se aplica la técnica de extracción de rectas horizontales desarrollada por Y.Y. Tang y colaboradores[49], en la que utilizan el análisis multiresolución en dimensión dos (MRA 2D, explicado en la sección 2.11). En dicha metodología se realiza la detección de rectas horizontales usando la subseñal HL, ya que aprovecha el efecto de realce y suavizado de las rectas horizontales y verticales, respectivamente. Para ejemplificarlo de forma clara se utiliza la imagen de la Fig. 4.10 y la ondícula Haar como la ondícula de análisis (Fig. 2.4(a)). Como se observa, la imagen tiene rectas horizontales, verticales y diagonales bien definidas. En la Fig.4.11 se muestran las cuatro subseñales (LL, HL, LH y HH) obtenidas mediante la técnica MRA 2D.

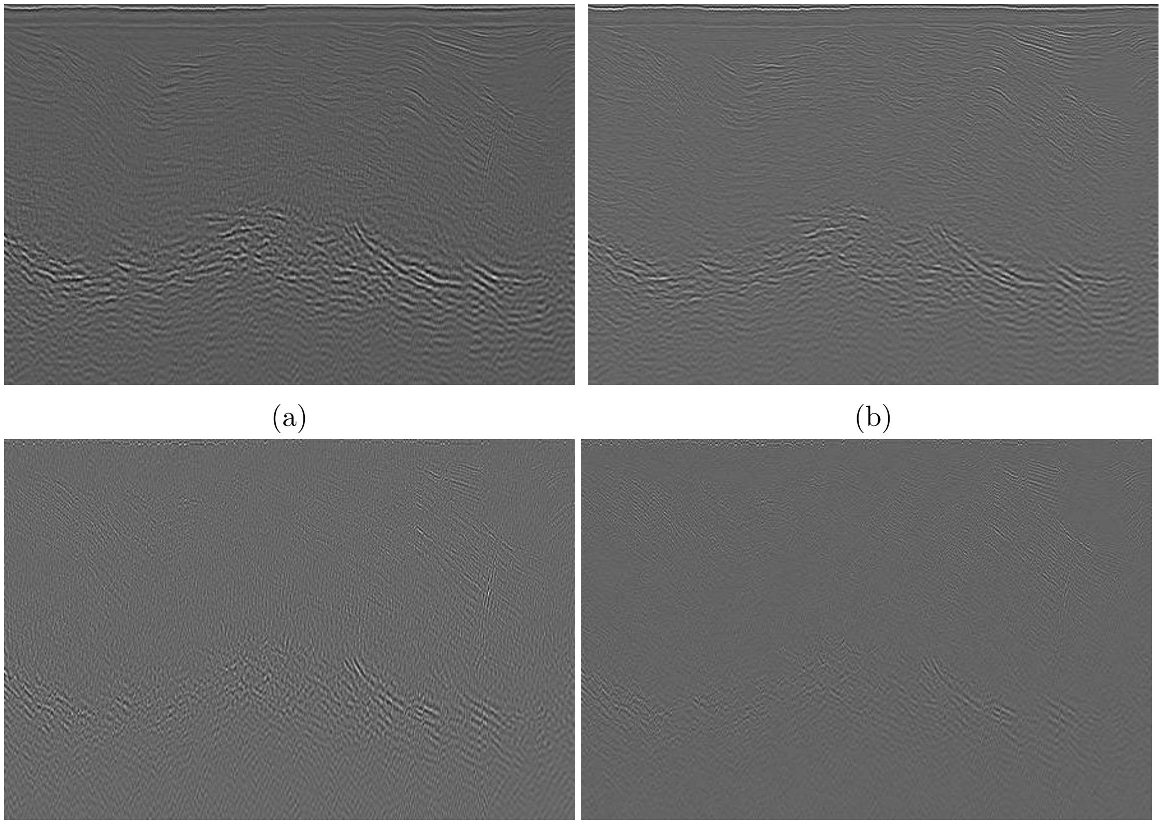
Figura 4.10: Imagen para ejemplificar la descomposición MRA 2D. Fotografía por Villegas-Vicencio, L.J. (2016)



(a) (b) (c) (d)

Figura 4.11: Descomposición MRA 2D. (a) Subseñal LL. (b) Subseñal HL. (c) Subseñal LH. (d) Subseñal HH.

La subseñal LL, Fig. 4.11(a), contiene solamente las bajas frecuencias (detalles burdos) lo que produce una versión de menor resolución de la imagen original. En la subseñal HL, Fig. 4.11(b), se aprecia cómo las líneas horizontales se intensifican y las verticales se atenúa. De manera contraria a la imagen HL, la subseñal LH, Fig. 4.11(c), exhibe una atenuación de las rectas horizontales y un realce en las



(a) (b) (c) (d)

Figura 4.12: Descomposición MRA 2D aplicada a la Fig. 4.5(b). (a) Subseñal LL. (b) Subseñal HL. (c) Subseñal LH. (d) Subseñal HH.

verticales. Finalmente, en la subseñal HH, Fig. 4.11(d), se realzan las rectas diagonales y, las rectas horizontales y verticales aparecen atenuadas, esto se debe a que se preservan solamente las altas frecuencias en ambas direcciones. En la Fig. 4.12 se muestra la descomposición en subseñales de la imagen sísmica de la Fig. 4.5(b). Como la descomposición MRA 2D genera subseñales de la mitad del tamaño de la imagen original, debido al submuestreo con el factor de escalamiento $\frac{1}{2}$ (Fig. 2.5), para recuperar el tamaño original de la imagen sísmica, se aplica un escalamiento mediante un procedimiento estándar con un factor de escalamiento 2 y una interpo-

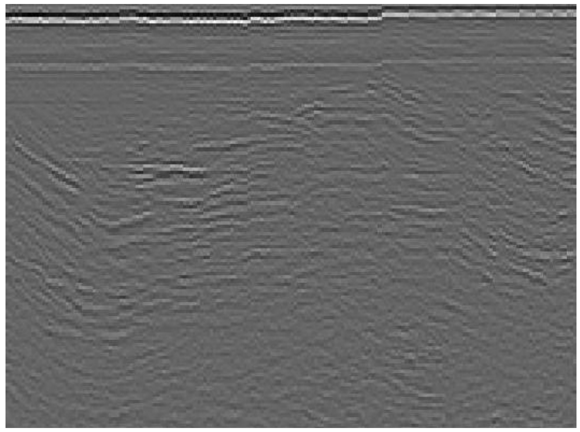


Figura 4.13: Amplificación de la subseñal HL de la Fig. 4.12(b), donde se muestra el SBR y el BSR.

lación bicúbica[20]. Una vez recuperado el tamaño original de la imagen, los valores más altos de intensidad están localizados en la recta corresponde al BSR, como se muestra en la Fig. 4.13.

4.6.2. Función de discriminación de rectas horizontales

Como en la subseñal HL se realzan las rectas horizontales y se atenúan las demás, al ser el BSR y los demás reflectores del que imitan al fondo marino rectas horizontales, ahí se tendrán los valores de mayor intensidad, por lo que podemos generar una función de discriminación $T(x)$ al sumar los valores de intensidad en cada renglón de la imagen HL, es decir

$$T(x) = \sum_{y=1}^{N} HL(x, y), \tag{4.12}$$

donde $x = 1, \ldots, M$. Puesto que la imagen sísmica está dada en unidades de tiempo, la ec.(4.12) se reescribe en términos de

$$t = (x - 1)f_s, \tag{4.13}$$

donde f_s corresponde a la frecuencia de muestreo.

Los máximos de la función $T(t)$ se encontrarán localizados en la posición que corresponde al BSR. En el caso de la presencia de un BSR con inclinación $\theta°$, la función $T(t)$ mostrará dos máximos, el que corresponde al SBR y al BSR. Por ejemplo, en la Fig. 4.14 se muestra la gráfica de la función $T(t)$ para la subseñal HL de la Fig. 4.13. En este caso el BSR presenta una inclinación de $\theta° = 6°$ con respecto al fondo marino, por lo tanto la subseñal HL muestra dos rectas horizontales que representan al SBR y al BSR. Tal como se esperaba, las amplitudes más altas de la función se presentan en los primeros tiempos de arribo de los dos reflectores horizontales. De acuerdo con la ec.(4.13) el SBR se localiza en $t = 0$ segundos y el BSR se encuentra en $t = 0.03$ segundos por debajo del fondo marino. Por otra parte, en la Fig.

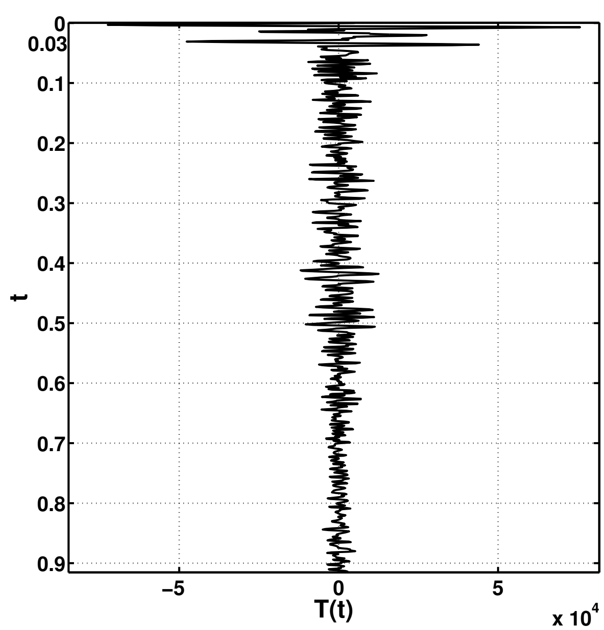


Figura 4.14: Suma de los valores de intensidad para cada renglón en la subseñal HL.

4.16 se muestra la función $T(t)$ obtenida de la subseñal HL una vez que se aplicó la descomposición MRA 2D al sismograma inclinado con respecto al BSR de la Fig. 4.9. En dicha función, los valores máximos se encuentran en $t = 0.027$ segundos y corresponden al BSR con inclinación de 6°.

La función $T(t)$ provee un criterio de discriminación para los reflectores horizontales, además de que se atenua la aportación de los reflectores que no son horizontales. Las series de tiempo en las Figs. 4.14 y 4.16 tienen una media $\mu = 0$ y los picos de amplitud correspondientes a los reflectores que no son horizontales se encuentran en el intervalo $\mu \pm 2EE$ (donde EE representa el error estándar). En general ese es el comportamiento tradicional, sin embargo para tomar en consideración aquellos casos atípicos en los que los reflectores no horizontales tienen amplitudes mayores a $\mu \pm 2EE$, los experimentos mostraron que el criterio apropiado para detectar a los reflectores horizontales es el intervalo $\mu \pm 5EE$, como se muestra en las Figs. 4.15 y 4.16.

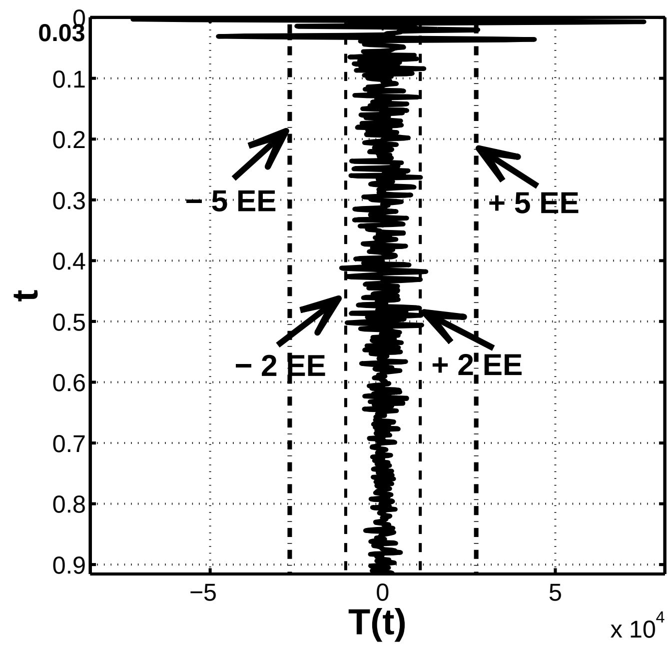


Figura 4.15: Criterio de discriminación para identificar a los reflectores horizontales.

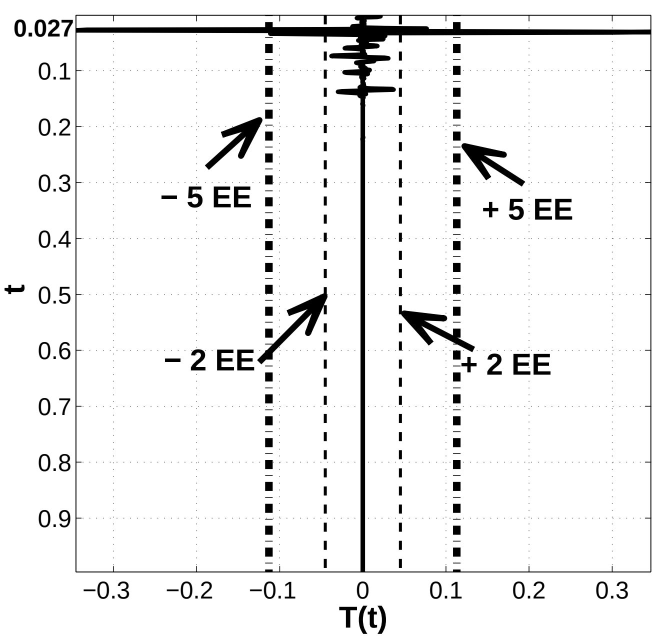


Figura 4.16: Criterio de discriminacón aplicado a la subseñal HL de la Fig. 4.9.

Capítulo 5

Validación del Sistema

5.1. Imágenes sintéticas

Con el propósito de analizar la efectividad del sistema automatizado de reconocimiento deL BSR, se creó una base de datos de imágenes sísmicas sintéticas, se utilizó la ondícula Ricker (también conocidad como sombrero mexicano) para construirlas, en la Fig. 5.1 se muestra el ejemplo de una traza. Las imágenes simulan tres tipos de reflectores del fondo marino:

1. horizontal,
2. diagonal,
3. sinusoidal,

además a cada uno de los tres tipos de reflectores se les añadió una de las siguientes cinco condiciones:

1. no existe un reflector paralelo,
2. BSR de ópalo,

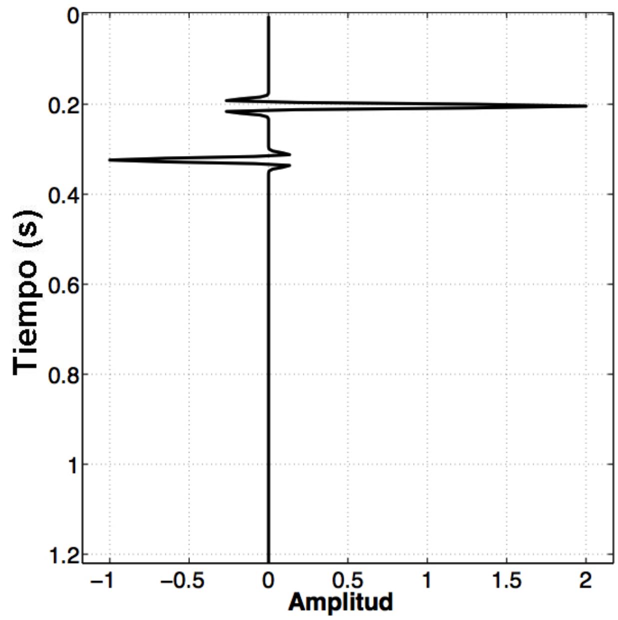


Figura 5.1: Traza sísmica generada con una ondícula Ricker.

3. BSR de gas,

4. múltiples facies paralelas, y

5. reflector paralelo profundo,

por lo que se tiene un total de quince imágenes sintéticas diferentes. En la Fig. 5.2 se presenta un ejemplo de un BSR diagonal de ópalo; su respectiva gráfica $T(t)$ está en la Fig. 5.3(a), la cual indica que el BSR aparece en $t = 0.03$ segundos por debajo del SBR. El sistema de reconocimiento muestra las curvas del SBR y el BSR en líneas punteadas negras en la Fig. 5.3(b). Con el sistema propuesto se localizarón todos los reflectores paralelos en las quince imágenes sintéticas, por lo que se concluye que el sistema tiene un nivel de confianza del 100 % para ese tipo de imágenes.

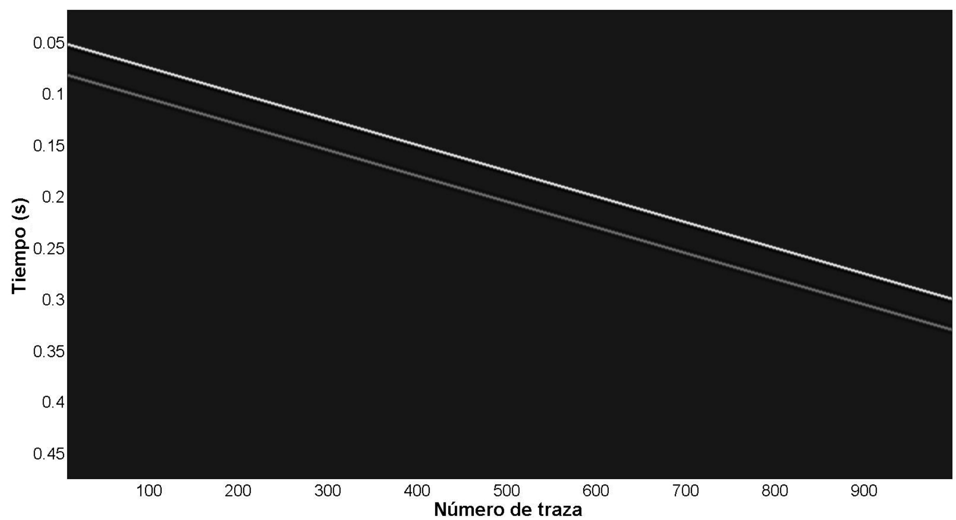
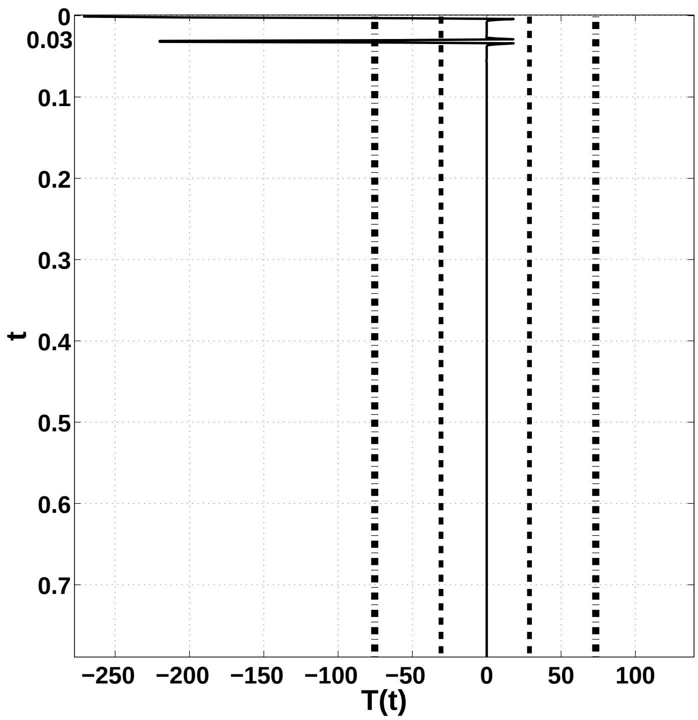
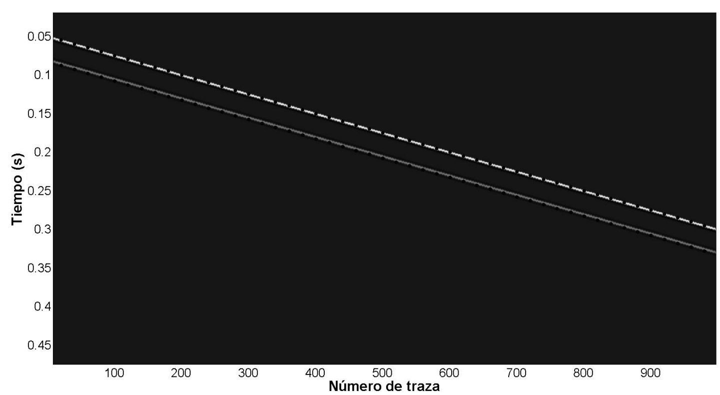


Figura 5.2: SBR diagonal con un BSR de ópalo y paralelo al SBR.

Para simular las condiciones que se presentan en imágenes de sísmica de reflexión, se han agregado otras condiciones a las quince imágenes sintéticas que se tenían: reflectores no paralelos y dos tipos de fallas. En el primer tipo de fallas, denominadas fallas de primer tipo, cada una de las capas tienen discontinuidad lateral. Al segundo tipo de fallas, nombradas fallas de segundo tipo, solamente las capas internas tienen discontinuidad lateral, la capa del SBR es continua. La Fig. 5.4(a) muestra el ejemplo de una imagen sísmica sintética con SBR sinusoidal, BSR formado a partir de gas, reflectores sinusoidales no paralelos al SBR y fallas del segundo tipo. La correspondiente gráfica de $T(t)$ está en la Fig. 5.4(b), la cual indica que el BSR aparece $t = 0.03$ segundos por debajo del SBR. El sistema de reconocimiento de patrones muestra en curvas punteadas al SBR y al BSR en la Fig. 5.4(c).

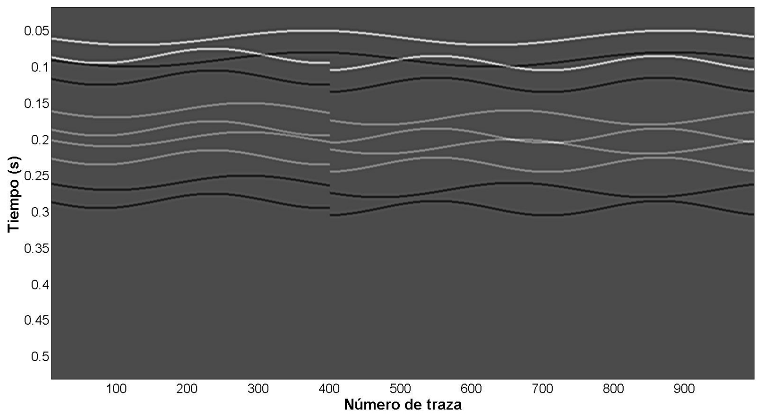


(a)

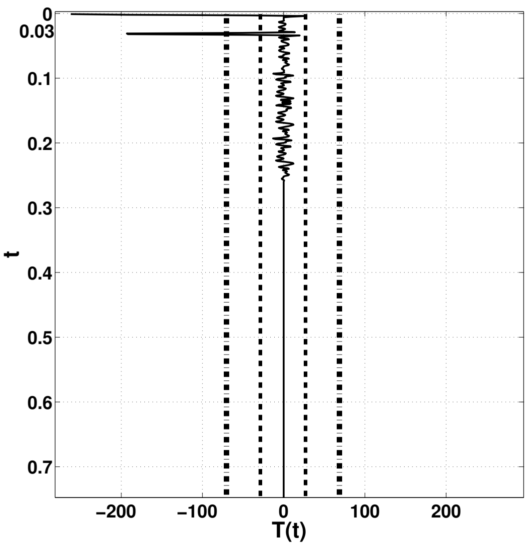


(b)

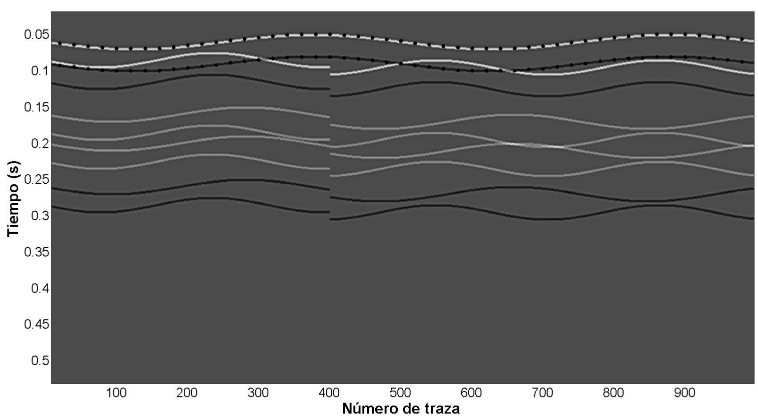
Figura 5.3: Respuesta del sistema de reconocimiento de patrones con imágenes sintéticas que presentan un SBR diagonal y un BSR paralelo (de ópalo). (a) La función $T(t)$ para la Fig. 5.2. (b) Localización del BSR, las curvas punteadas en blanco y gris indican el SBR y el BSR, respectivamente.



(a)



(b)



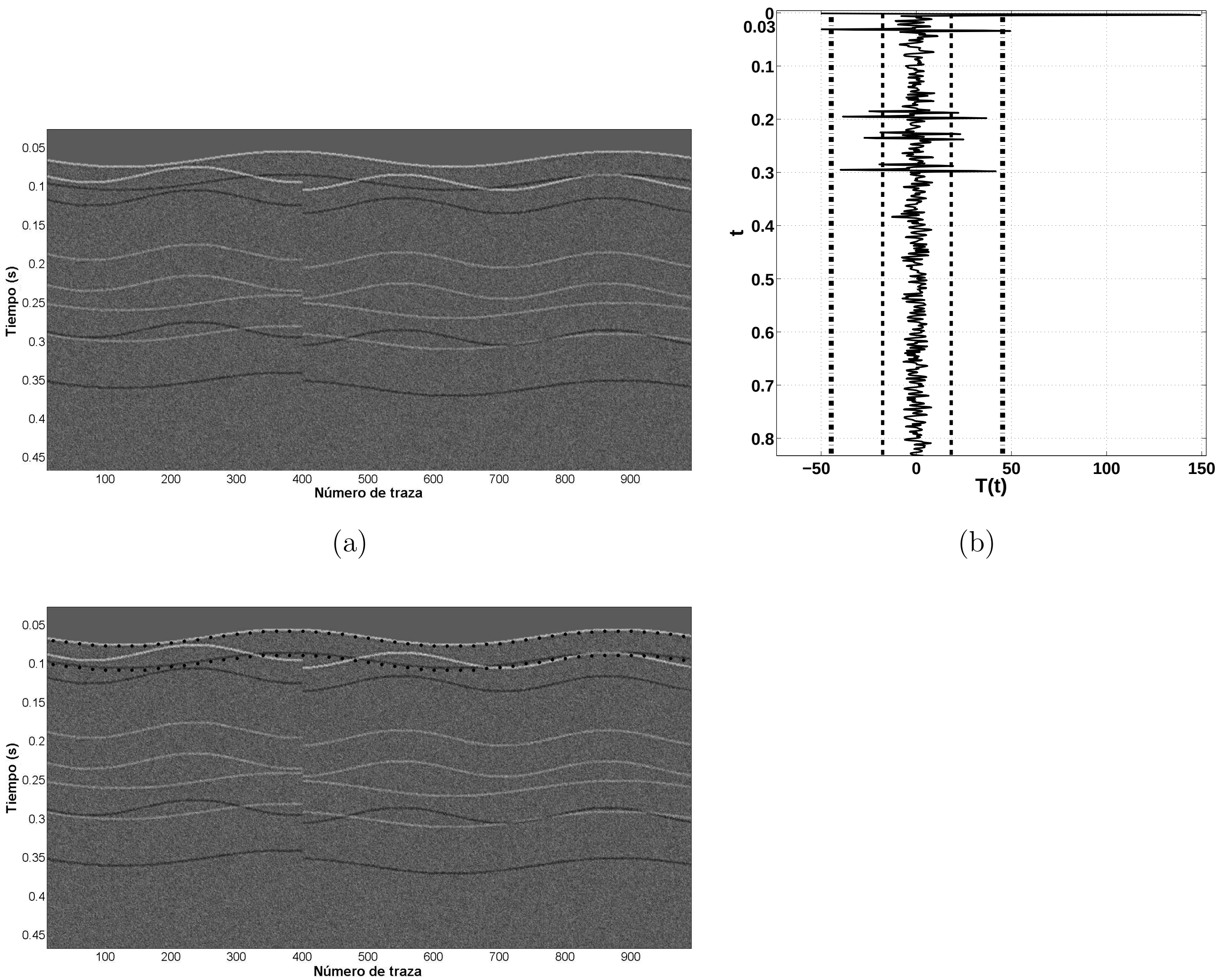
(c)

Figura 5.4: Respuesta del sistema de reconocimiento de patrones para una imagen sintética con SBR sinusoidal, BSR formado a partir de gas, reflectores sinusoidales no paralelos al SBR y fallas de segundo tipo. (a) Imagen sísmica. (b) Función $T(t)$ correspondiente a la Fig. 5.4(a). (c) Salida del sistema de reconocimiento de patrones, las curvas punteadas indican al SBR y al BSR.

El sistema de reconocimiento de patrones detectó el 100 % de los reflectores paralelos en las imágenes sintéticas, aún cuando se les han agregado reflectores no paralelos y fallas. Además, se probó su eficacia usando imágenes con ruido aditivo gaussiano y, sal y pimienta. Se crearon cuatro escenarios: SBR y reflectores paralelos; SBR, reflectores paralelos y no paralelos; SBR, reflectores paralelos, reflectores no paralelos y fallas del primer tipo; SBR, reflectores paralelos, reflectores no paralelos y fallas del segundo tipo. La Fig. 5.5(a) muestra una imagen sísmica sintética con un SBR sinusoidal, BSR formado a partir de gas, reflectores sinusoidales no paralelos al SBR, fallas del segundo tipo y ruido aditivo gaussiano con 6dB de razón señal-ruido (por sus siglas en inglés SNR). La correspondiente gráfica de $T(t)$ está en la Fig. 5.5(b), donde se indica que el BSR aparece $t = 0.03$ segundos por debajo del SBR y la Fig. 5.5(c) muestra en curvas punteadas al SBR y al BSR sobre la imagen sísmica.

En la Tabla 5.3 se resume la efectividad del sistema cuando se tienen imágenes sintéticas con ruido aditivo gaussiano. En la primer columna se indican los distintos escenarios. El ruido aditivo gaussiano anãdido a las imágenes tiene valores de 10dB, 8dB, 6dB, 5dB, 3dB, 2dB, 1dB y 0dB, la respuesta del sistema a dichos casos se presentan de la columna dos a la nueve, respectivamente. El porcentaje mostrado en la Table 5.3 se calculó usando 15 imágenes sintéticas por escenario. Un análisis semejante se realizó usando ruido sal y pimienta, con valores de densidad que van de 0.1 a 0.9 con un tamaño de paso de 0.2, Tabla 5.4.

Se usaron un total de 840 imágenes sintéticas para probar la metodología. En imágenes sin ruido el sistema localizó al 100 % los BSR y reflectores paralelos al SBR, aún cuando existieran otros reflectores no paralelos y fallas. Para imágenes con ruido, el sistema mostró tener una eficiencia de al menos el 97 % cuando se pre-



(a) (b)

(c)

Figura 5.5: Respuesta del sistema para una imágen sintética con ruido aditivo gaussiano. (a) Imagen sintética con SBR sinusoidal, BSR formado a partir de gas, reflectores sinusoidales no paralelos al SBR, fallas de segundo tipo y ruido aditivo gaussiano de 6dB para la razón señal-ruido. (b) Función $T(t)$ correspondiente a la Fig. 5.5(a). (c) Salida del sistema de reconocimiento de patrones, las curvas punteadas indican al SBR y al BSR detectados.

Tabla 5.3: Respuesta del sistema de reconocimiento de patrones en imágenes sintéticas en presencia de diferentes niveles de ruido aditivo gaussiano.

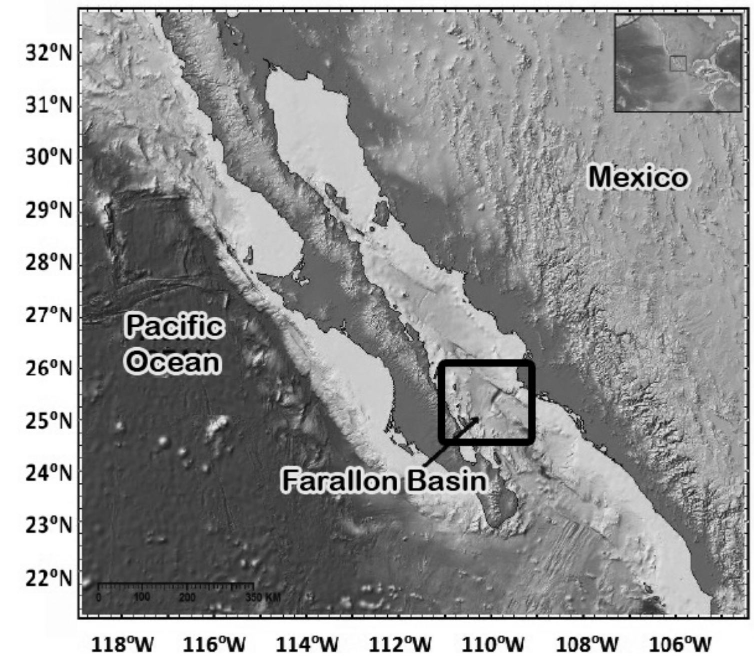
escenario	razón señal-ruido (SNR) en dB							
	10	8	6	5	3	2	1	0
SBR y reflectores paralelos	100 %	100 %	100 %	97 %	97 %	70 %	37 %	20 %
SBR, reflectores paralelos y no paralelos	100 %	100 %	100 %	97 %	97 %	70 %	37 %	20 %
SBR, reflectores paralelos, reflectores no paralelos y fallas del primer tipo	100 %	100 %	100 %	97 %	97 %	70 %	37 %	20 %
SBR, reflectores paralelos, reflectores no paralelos y fallas del segundo tipo	100 %	100 %	100 %	97 %	97 %	70 %	37 %	20 %

senta ruido aditivo gaussiano de hasta de 3dB en la razón señal-ruido. En el caso del ruido sal y pimienta se tiene al menos el 93 % para valores de densidad de hasta el 0.7.

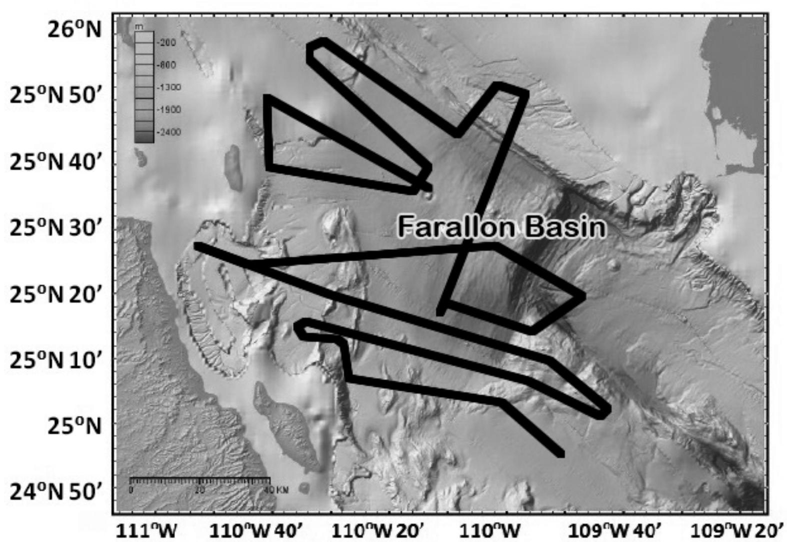
5.2. Imágenes de sísmica de reflexión

Para probar el sistema de reconocimiento de patrones con datos reales, se utilizó una base de datos de 9 imágenes de sísmica de reflexión. Las líneas fueron obtenidas en el Golfo de California usando la técnica de sísmica de reflexión 2D multicomponente de alta resolución. En la Fig. 5.6(a) se indica el área del muestreo con una caja negra y en la Fig. 5.6(b) se muestra una amplificación de dicha zona, donde los perfiles sísmicos fueron resaltados por líneas negras.

La Fig. 5.7 muestra una imagen sísmica de la coordenada geográfica $110°W20'$ de



(a)



(b)

Figura 5.6: Mapa de batrimetría y modelo de elevación digital del noroeste de México[50]. (a) La zona de estudio se localiza en la Cuenca Farallón, en el Golfo de California y está señalada con un recuadro negro. (b) Amplificación del área estudio: la Cuenca Farallón; los perfiles sísmicos se indican con líneas negras.

Tabla 5.4: Respuesta del sistema de reconocimiento de patrones en imágenes sintéticas en presencia de diferentes niveles de ruido sal y pimienta.

escenario	nivel de densidad					
	0.1	0.3	0.5	0.7	0.8	0.9
SBR y reflectores paralelos	100 %	100 %	100 %	93 %	57 %	6.70 %
SBR, reflectores paralelos y no paralelos	100 %	100 %	100 %	93 %	57 %	6.70 %
SBR, reflectores paralelos, reflectores no paralelos y fallas del primer tipo	100 %	100 %	100 %	93 %	57 %	6.70 %
SBR, reflectores paralelos, reflectores no paralelos y fallas del segundo tipo	100 %	100 %	100 %	93 %	57 %	6.70 %

latitud y $25°N50'$ de longitud en la Cuenca Farallón. Cada imagen sísmica se dividió en secciones de aproximadamente 250 trazas, reduciendo considerablemente el costo del tiempo computacional de los procesos. De esta manera, se desarrolló un sistema de reconocimiento automatizado del BSR y reflectores paralelos al SBR que puede ser implementado en cómputo en paralelo y más aún, que puede ser manejado por una computadora de escritorio. Un ejemplo de esto, se muestra en la Fig. 5.8, en la sección (a) se presenta una sección sísmica de la línea localizada de la coordenada geográfica $(25.10763°, -109.93275°)$ a la coordenada $(25.01640°, -109.74953°)$ en la Cuenca Farallón. La correspondiente gráfica $T(t)$ está dada en la Fig. 5.8(b), la cual indica que el BSR aparece a $t = 0.035$ segundos por debajo del SBR. Y, en la imagen sísmica de la Fig. 5.8(c) se resaltan lo reflectores detectados con curvas punteadas negras. En la Fig. 5.9(a) se despliega otra imagen sísmica donde el BSR no es tan

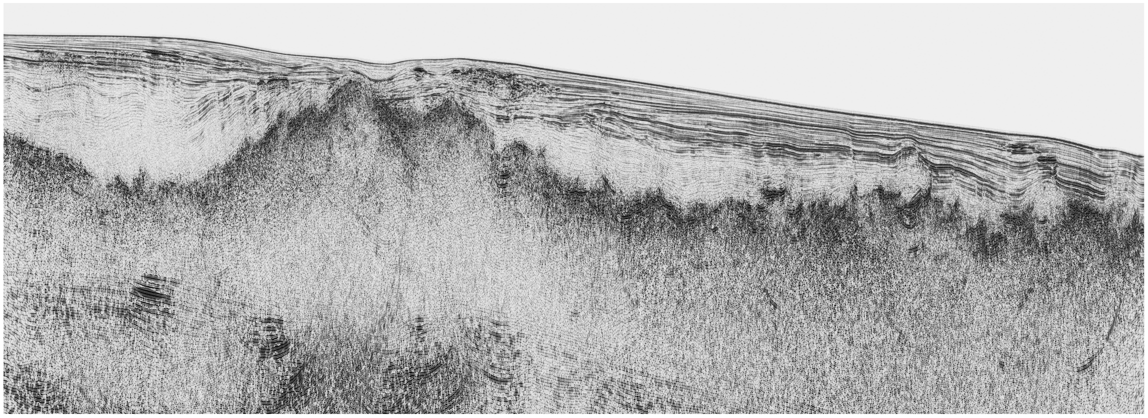
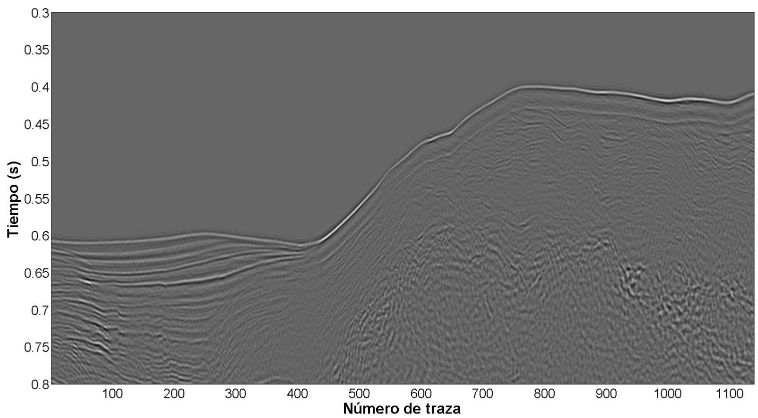
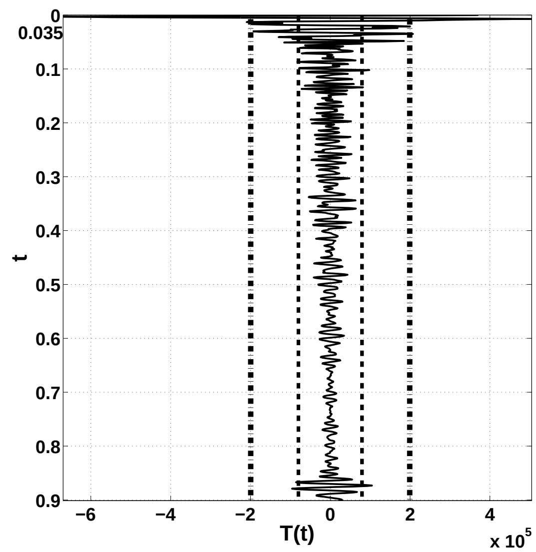


Figura 5.7: Imagen sísmica de la línea localizada de la coordenada geográfica $(25.98562°, -110.52102°)$ a la coordenada $(25.94303°, -110.56807°)$ en la Cuenca Farallón.

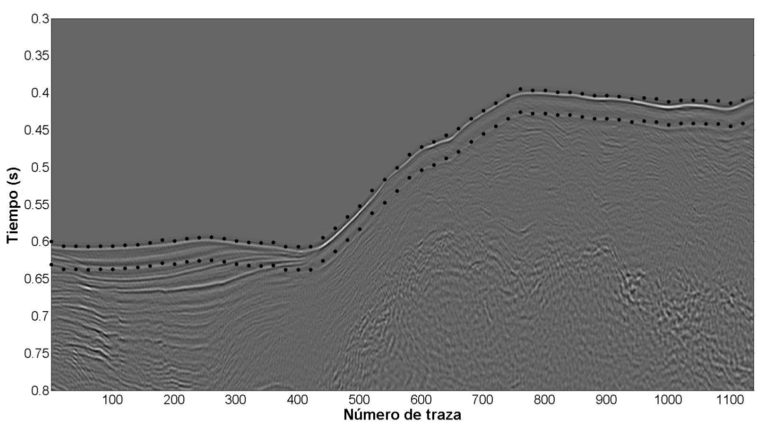
evidente y corta a través de reflectores litológicos. La correspondiente gráfica $T(t)$, Fig.5.9(b), se indica que el BSR se localiza a $t = 0.069$ segundos por debajo del SBR y en la Fig.5.9(c) se resaltan el SBR y el BSR en la imagen sísmica mediante curvas punteadas negras. Solamente parte de las secciones sísmicas presentan BSR visibles y en algunas secciones se tienen reflectores paralelos de otro tipo, tales como múltiples y facies paralelas. El sistema de reconocimiento de patrones mostró una eficiencia de al menos el 95 % para clasificar BSRs en sismogramas de datos reales.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.8: Respuesta del sistema de reconocimiento de patrones con datos reales. (a) Sección de una imagen sísmica de la línea localizada de la coordenada geográfica $(25.10763°, -109.93275°)$ a la coordenada $(25.01640°, -109.74953°)$ en la Cuenca Farallón. (b) Función $T(t)$ de la Fig. 5.8(a). (c) SBR y BSR localizados en la imagen sísmica, ambos están indicados en curvas punteadas negras.

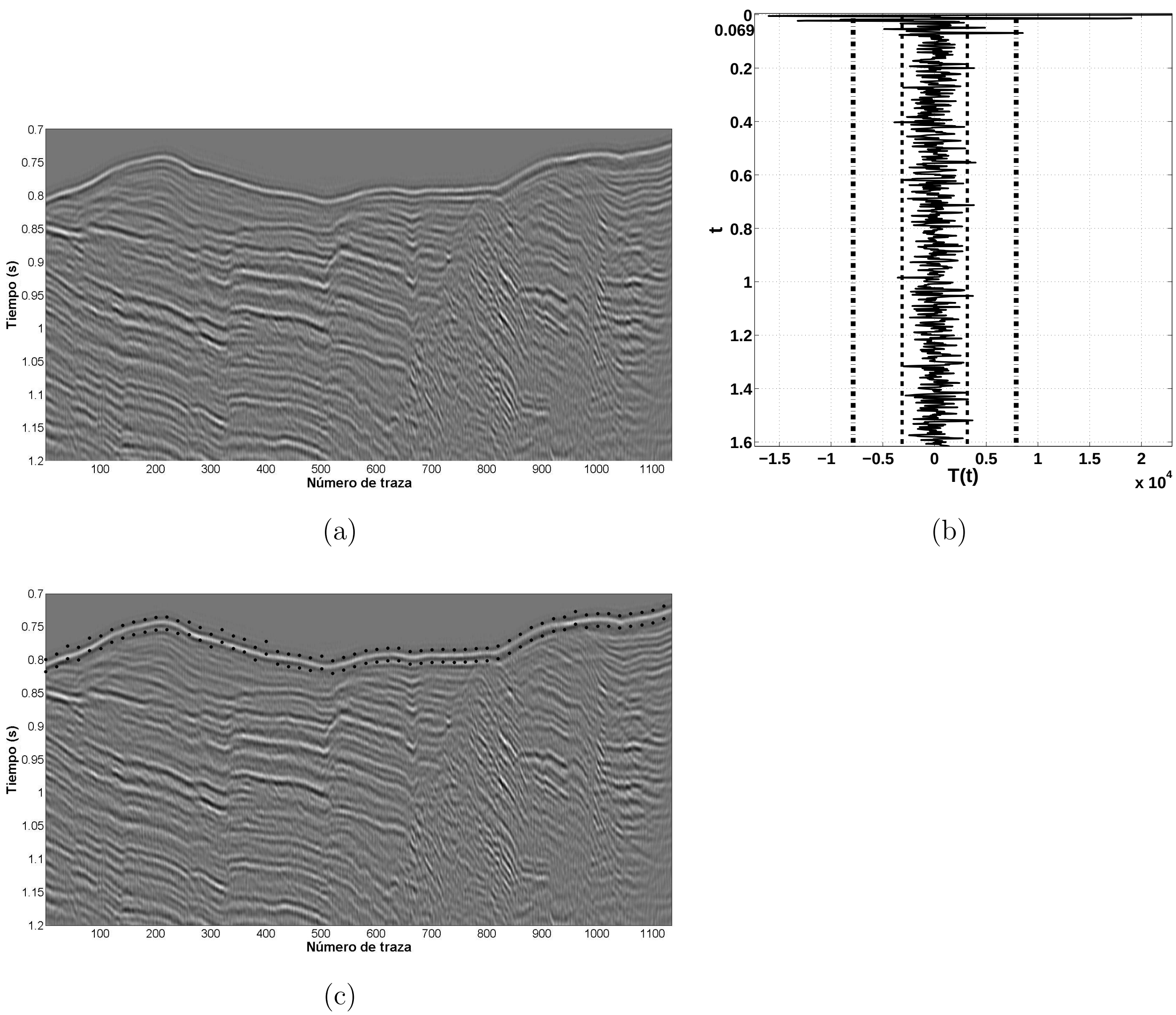


Figura 5.9: Respuesta del sistema de reconocimiento de patrones con datos reales. (a) Sección de una imagen sísmica de la línea localizada de la coordenada geográfica $(25.45798°, -110.03868°)$ a la coordenada $(25.34115°, -109.79095°)$ en la Cuenca Farallón. (b) Función $T(t)$ de la Fig. 5.8(a). (c) SBR y BSR localizados en la imagen sísmica, ambos están indicados en curvas punteadas negras.

Conclusiones

En esta propuesta de tesis se presenta una nueva metodología para procesar señales sinusoidales tipo ondícula, con el fin de extraer sus características relevantes y llevar a cabo el reconocimiento de patrones en imágenes sísmicas de reflexión para localizar el SBR y el BSR. El sistema de reconocimiento y localización del SBR y el BSR se diseñó usando análisis multiresolución 2D (transformadas *wavelets*) en conjunto con las transformadas de Fourier y Radon. Se utilizaron los filtros promedio, umbral, y AGC. Además, se construyó una función de discriminación para detectar la presencia del SBR y el BSR usando la estadística paramétrica de diagramas de cajas a partir de la media de la serie de tiempo generada por la metodología. El sistema se implementó (en lenguaje de programación MATLAB$^{@}$) en una computadora de escritorio, por lo que es de fácil acceso para procesar datos en salidas de campo y cruceros. La validación se llevó a cabo mediante la estadística paramétrica de diagrama de cajas a partir de la media muestral de la base de datos generada: a) imágenes sintéticas limpias; b) imágenes sintéticas con ruido; c) imágenes de sísmica de reflexión.

La nueva metodología mostró que detecta el BSR en imágenes sintéticas, aún cuando se presentan altos niveles de ruido y situaciones estructurales como fallas y reflectores no paralelos. Cuando se utilizan datos reales (obtenidos de la Cuenca Farallón, Golfo de California) el sistema de reconocimiento de BSR trabaja eficientemente con secciones de las imágenes sísmicas de reflexión, esto quiere decir que podemos reducir el tiempo de cómputo al procesar imágenes de menor tamaño e implementar el sistema en computadoras de escritorio o en cómputo en paralelo. En este trabajo, se dividieron las imágenes en secciones de aproximadamente 250 trazas.

El sistema detectó al 100 % de los BSRs en las imágenes sintéticas, independientemente de si eran paralelos o tenían algún grado de inclinación con respecto al SBR, si son de ópalo o formados por gas, si existían múltiples reflectores paralelos al fondo marino y fallas. De los cuatro escenarios compuestos (cada uno de los cuales contiene 15 imágenes sintéticas distintas), cuando a esas imágenes se les anãde ruido aditivo gaussiano de 10dB a 6 dB con respecto a la razón señal-ruido, el sistema detectó a los BSRs con un nivel de confianza del 100 %, para valores hasta el rango de 5dB el nivel de confianza decayó al 97 %, cuando se tienen valores de hasta 2dB el sistema alcanza solamente el 70 % de eficacia(Table 5.3). En el caso del ruido sal y pimienta, con valores de densidad del 0.1 al 0.5, se detectaron al 100 % todos los BSRs, para valores de hasta el 0.7 el nivel de confianza del sistema es de hasta el 93 % y de 57 % para valores de densidad del 0.8 (Table 5.4). Cuando se trabajó con imágenes de sísmica de reflexión (datos reales obtenidos de la Cuenca Farallón en el Golfo de California), el sistema detectó el 95 % de los BSR u otros reflectores paralelos al SBR en las secciones donde habían BSR u otros reflectores paralelos al SBR, aún cuando estos cortaban reflectores litológicos. Además, el sistema detecta reflectores que son cuasi-paralelos, esto dependerá de la forma y del largo de los reflectores, ya que la metodología está especializada en buscar BSRs que tengan la forma del SBR.

Bibliografía

[1] M.M. Al-Hajeri, M. Al-Saeed, J. Derks, T. Fuchs, T. Hantschel, A. Kauerauf, M. Neumaier, O. Schenk, O. Swientek, N. Tessen, et al. Basin and petroleum system modeling. *Oilfield Review*, 21(2):14–29, 2009.

[2] J. Álvarez-Borrego, S. Solorza, y M.A. Bueno-Ibarra. Invariant correlation to position and rotation using a binary mask applied to binary and gray images. *Optics Communications*, 294:105–117, 2013.

[3] R.P. Areny. *Sensores y acondicionadores de señal*. Marcombo, 2005. ISBN 9788426713445. URL https://books.google.com.mx/books?id=Eevyk28_fVkC.

[4] W. Ashcroft. *A Petroleum Geologist's Guide to Seismic Reflection*. Wiley, 2011. ISBN 9781444397864. URL https://books.google.com.mx/books?id=lISqvhbmbDwC.

[5] P. Avseth, T. Mukerji, y G. Mavko. *Quantitative Seismic Interpretation: Applying Rock Physics Tools to Reduce Interpretation Risk*. Cambridge University Press, 2010. ISBN 9780521151351.

[6] J.C. Barreto. *Reconocimiento de litofacies aplicando atributos sísmicos y métodos de clasificación guiada en las parcelas 362-7/362-8/362-9/362-10 del campo jobo, área mayor de temblador, estado Monagas*. Proyecto Fin de Carrera, Universidad Central de Venezuela, Escuela de Ingeniería en Geología, Minas y Geofísica, 2004.

[7] C. Berndt, S. Bünz, T. Clayton, J. Mienert, y M. Saunders. Seismic character of bottom simulating reflectors: Examples from the mid-Norwegian margin. *Marine and Petroleum Geology*, 21(6):723–733, 2004. URL http://oceanrep.geomar.de/19131/.

[8] C.K. Chui. *An Introduction to Wavelets*. Academic Press Professional, Inc., San Diego, CA, USA, 1992. ISBN 0-12-174584-8.

[9] L. Chun-Lin. *A Tutorial of the Wavelet Transform*. National Taiwan University, Department of Electrical Engineering, 2010.

[10] J.W. Cooley y J.W. Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematics of Computation*, 19(90):297–301, 1965.

[11] A. Coronel-Beltrán. *Reconocimiento de patrones no lineal invariante a posición, rotación, escala y ruido de imágenes digitales*. Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Baja California, Facultad de Ingeniería Ensenada, 2010.

[12] I. Daubechies. The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis. *IEEE Transactions on Information Theory*, 36(5):961–1005, 1990. ISSN 0018-9448. doi:10.1109/18.57199.

[13] L. Debnath y D. Bhatta. *Integral transforms and their applications*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2nd ed. edón., 2007. Includes bibliographical references (p. 673-688) and index.

[14] S. Derrode y F. Ghorbel. Robust and efficient fourier-mellin transform approximations for gray-level image reconstruction and complete invariant description. *Computer Vision and Image Understanding*, 83:57–78, 2001.

[15] Q. Ding y N. Zhang. Classification of recorded musical instruments sounds based on neural networks. En *Computational Intelligence in Image and Signal Processing, 2007. CIISP 2007. IEEE Symposium on*, págs. 157–162. 2007. doi: 10.1109/CIISP.2007.369310.

[16] M.B. Dobrin y C.H. Savit. *Introduction to geophysical prospecting*. McGraw-Hill International Editions: Geology series. McGraw-Hill Book Co., 1988. ISBN 9780070171961. URL https://books.google.com.mx/books?id=-ohPAQAAIAAJ.

[17] T.G. Feeman. *The Mathematics of Medical Imaging*. Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology. Springer-Verlag New York, 2010. ISBN 9780387927121.

[18] L. Ferariu y D. Panescu. Multiobjective selection of features for pattern recognition. En *Robotic and Sensors Environments, 2009. ROSE 2009. IEEE International Workshop on*, págs. 139–144. 2009. doi:10.1109/ROSE.2009.5355996.

[19] K.M. Furati y A.H. Siddiqi. *Mathematical Models and Methods for Real World Systems*. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. CRC Press, 2005. ISBN 9781420026511. URL https://books.google.com.mx/books?id=0XouAPj4uTsC.

[20] R.C. Gonzalez y R.E. Woods. *Digital Image Processing (3ra ed.)*. Pearson/Prentice Hall, 2008. ISBN 9780131687288.

[21] A. Hirose y K.E. Lonngren. *Fundamentals of Wave Phenomena*. The Mario Boella series on electromagnetism in information & communication. SciTech Pub., 2010. ISBN 9781891121920. URL https://books.google.com.mx/books?id=f07oQgAACAAJ.

[22] H.P. Hsu y R. Mehra. *Análisis de Fourier*. Colección Addison: Teoría y problemas con solución. Pearson Educación, 1998. ISBN 9789684443563. URL https://books.google.com.mx/books?id=aGnxPgAACAAJ.

[23] A.K. Jain, R.P.W. Duin, y J. Mao. Statistical pattern recognition: A review. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 22(1):4–37, 2000. ISSN 0162-8828. doi:10.1109/34.824819. URL http://dx.doi.org/10.1109/34.824819.

[24] E.A. Lebedeva y V.Y. Protasov. Meyer wavelets with least uncertainty constant. *Mathematical Notes*, 84:680–687, 2008. doi:10.1134/S0001434608110096.

[25] S.W. Li. Analysis of contrasting neural network with small-world network. En *Future Information Technology and Management Engineering, 2008. FITME '08. International Seminar on*, págs. 57–60. 2008. doi:10.1109/FITME.2008.55.

[26] M.E. MacKay, R.D. Jarrard, G.K. Westbrook, y R.D. Hyndman. Origin of bottom-simulating reflectors: Geophysical evidence from the Cascadia accretionary prism. *Geology*, 22(5):459–462, 1994. doi:10.1130/0091-7613(1994)022⟨0459:OOBSRG⟩2.3.CO;2. URL http://geology.gsapubs.org/content/22/5/459.abstract.

[27] S.G. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7):674–693, 1989. ISSN 0162-8828. doi:10.1109/34.192463.

[28] R. Ng. Fourier slice photography. *ACM Transactions on Graphics*, 24(3):735–744, 2005.

[29] E.S. Olivas. *Tratamiento digital de señales: problemas y ejercicios resueltos*. Prentice práctica. Pearson, 2003. ISBN 9788420535593. URL https://books.google.com.mx/books?id=jkhyWjmJBGUC.

[30] B. Osgood. The Fourier transform and its applications., 2010. Electrical Engineering Departmente, Stanford University.

[31] I.A. Pecher, T.A. Minshull, S.C. Singh, y R. von Huene. Velocity structure of a bottom simulating reflector offshore Perú: Results from full waveform inversion. *Earth and Planetary Science Letters*, 139(3–4):459 – 469, 1996. ISSN 0012-821X. doi:http://dx.doi.org/10.1016/0012-821X(95)00242-5. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0012821X95002425.

[32] A.D. Poularikas. *Transforms and Applications Handbook*. Electrical Engineering Handbook. CRC Press, third ed$^{\underline{ón}}$., 2010. ISBN 9781420066531. URL https://books.google.com.mx/books?id=LfTNdPDLOkYC.

[33] J.W.S.B. Rayleigh. *The Theory of Sound*. Nº 1 en The Theory of Sound. Macmillan, 1894. URL https://books.google.com.mx/books?id=hd8EAAAAYAAJ.

[34] D. Sánchez-Morillo. *Procesado y transmisión de señales biomédicas para el diagnóstico de trastornos y enfermedades del sueño*. Tesis Doctoral, Universidad de Cádiz, Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, Tecnología Electrónica y Electrónica, 2008.

[35] C.V. Sanz. *Razonamiento evidencial dinámico - Un Método de Clasificación aplicado al Análisis de Imágenes Hiperespectrales*. Tesis Doctoral, Universidad Nacional de La Plata, Facultad de Ciencias Exactas, 2002.

[36] I.W. Selesnick. Wavelet transforms - a quick study. *Physics Today*, 2007.

[37] J.F.V. Serrano, V.V. Staff, A.B.M. Diaz, A.S. Calle, y J.L.E. Sanchez-Marin. *Visión Por Computador*. Textos docentes. Dykinson, S.L., 2003. ISBN 9788497720694. URL https://books.google.com.mx/books?id=-dE-AQAACAAJ.

[38] A.K. Sharma y R.R. Kishor. Pattern recognition: Different available approaches. En *Proceedings of National Conference on Challenges & Opportunities in Information Technology (COIT-2007) RIMT-IET, Mandi Gobindgarh*, págs. 221–224. 2007.

[39] M. Sifuzzaman, M.R. Islam, y M.Z. Ali. Application of wavelet transform and its advantages compared to fourier transform. *Journal of Physical Sciences*, 13:121–134, 2009.

[40] A. Solís-Ventura. *Correlación no lineal invariante a posición y rotación utilizando máscaras adaptativas binarias*. Proyecto Fin de Carrera, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, 2012.

[41] A. Solís-Ventura, J. Álvarez-Borrego, y S. Solorza. Adaptive nonlinear correlation with a binary mask invariant to rotation and scale. *Optics Communications*, 339:185–193, 2015.

[42] C. Solomon y T. Breckon. *Fundamentals of Digital Image Processing: A Practical Approach with Examples in Matlab*. Wiley, 2011. ISBN 9781119957003. URL https://books.google.co.in/books?id=NoJ15jLdy7YC.

[43] S. Solorza y J. Álvarez-Borrego. Digital system of invariant correlation to position and rotation. *Optics Communications*, 283:3613–3630, 2010.

[44] S. Solorza y J. Álvarez-Borrego. Position and rotation-invariant pattern recognition system by binary rings masks. *Journal of Modern Optics*, 62(10):851–864, 2015.

[45] S. Solorza, J. Álvarez-Borrego, y G. Chaparro-Magallanez. Pattern recognition of digital images by one-dimensional signatures. En *Fourier Transform: Signal Processing (Hb 2014)*. Intech, 2014. ISBN 9535104535. URL https://www.amazon.com/Fourier-Transform-Signal-Processing-2014/dp/9535104535%3FSubscriptionId%3D0JYN1NVW651KCA56C102%26tag%3Dtechkie-20%26linkCode%3Dxm2%26camp%3D2025%26creative%3D165953%26creativeASIN%3D9535104535.

[46] S. Solorza-Calderón. A position, rotation and scale invariant image descriptor based on rays and circular paths. tomo 9599. SPIE, 2015.

[47] S. Solorza-Calderón y J. Verdugo-Olachea. *Progress in Pattern Recognition, Image Analysis, Computer Vision, and Applications*, cap. A RFM Pattern Recognition System Invariant to Rotation, Scale and Translation, págs. 477–484. LNCS9423. Springer, 2016.

[48] M.T. Taner. Seismic attributes. *CSEG Recorder*, 26:48–56, 2001.

[49] Y.Y. Tang, M. Hong, L. Jiming, F.L. Bing, y X. Dihua. Multiresolution analysis in extraction of reference lines from documents with gray level background. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 19(8):921–926, 1997. ISSN 0162-8828. doi:10.1109/34.608296.

[50] A. Teutle. *Evidencias de gas en sedimentos de la Cuenca Farallón, Golfo de California, a partir de las características de sísmica de reflexión.* Tesis Doctoral, Ciencias de la Tierra, CICESE, México, 2011.

[51] J. Verdugo-Olachea. *Reconocimiento de patrones en imágenes digitales usando la transformada de Radon*. Proyecto Fin de Carrera, Universidad Autónoma de Baja California, 2015.

[52] J.G. Webster. *Medical instrumentation: application and design (4ta ed.)*. John Wiley & Sons., 2010. ISBN 9780471676003.

Apéndice A: Fundamentos Geofísicos

A.1. Técnicas de exploración petrolera

La exploración petrolera utiliza diferentes técnicas para llevar a cabo la caracterización de hidrocarburos: gravimetría, electromagnetometría, aeromagnetometría y prospección sísmica. Las cuatro técnicas se utilizan para localizar cuencas sedimentarias, qué tan profundas son y cuáles son las características estructurales. Las prospecciones sísmicas han sido utilizadas para delimitar las estructuras subsuperficiales y detectar la presencia de hidrocarburos antes de perforar. Existen dos tipos de prospecciones sísmicas: refracción y reflexión, que dependen del tipo de transmisión de la energía sísmica. La sísmica reflexión provee más información y resuelve detalles estructurales a profundidades mayores de 10 metros, además de proporcionar imágenes subsuperficiales en dimensión tres[4].

A.2. Atributos sísmicos

En geofísica, los atributos sísmicos según Taner[48], es toda aquella información obtenida de datos sísmicos, ya sea por medición directa, por razonamiento lógico o basado en la experiencia. En la actualidad se pueden extraer, guardar, visualizar, analizar, validar y evaluar los atributos sísmicos mediante la investigación aplicada, desarrollo de algoritmos y sistemas integrados de software[6]. El principal objetivo de los atributos es proveer información precisa y detallada para el intérprete de los parámetros estructurales, estratigráficos y litológicos de la prospección sísmica[48]. Hoy en día existe un incremento en la gran variedad de atributos, por lo que en la bibliografía se encuentran diversas clasificaciones. A continuación se muestran algunos de esos atributos que podrían ser utilizados para el reconocimiento de áreas de gas.

Atributos de la traza compleja

Los atributos de la traza compleja son medidas basadas en el análisis de la traza sísmica analítica. Una traza sísmica se puede representar a partir de una señal analítica, con componentes real e imaginaria[6]. El análisis de la traza compleja separa la información en amplitud y fase, para después combinarlas de diferentes maneras. Matemáticamente, la traza compleja está representada como

$$F(t) = f(t) + ih(t), \tag{A.1}$$

donde $f(t)$ es la traza grabada y $h(t)$ es la traza de cuadratura.

La traza de cuadratura $h(t)$ se determinada mediante la transformada Hilbert de la traza grabada $f(t)$, es decir,

$$h(t) = \frac{1}{\pi t} f(t). \tag{A.2}$$

En la práctica, $h(t)$ es un versión de $f(t)$ pero con la fase rotada de 90°. Otros atributos de la traza compleja se derivan de la traza de cuadratura y la traza grabada.

Amplitud instantánea

La amplitud instantánea, también llamada intensidad de reflexión, es una función del tiempo que puede tener su valor máximo en puntos de la fase que no pertenecen a un pico o valle de la traza real, especialmente si el evento está compuesto por varias reflexiones. Por ello, la intensidad máxima de reflexión asociada con un evento reflector puede ser diferente de la amplitud máxima del pico o valle de la traza real[6]. La amplitud instantánea es la envolvente de la traza sísmica. Para un instante de tiempo, la amplitud instantánea se calcula como la raíz cuadrada de la energía total de la señal sísmica, por lo tanto, la amplitud instantánea siempre será positiva y del mismo orden de magnitud que la traza real. Los principales usos de la amplitud instantánea son:

- Proveer información acerca de los contrastes en la impedancia acústica y por consiguiente en la reflectividad.
- Detectar los cambios laterales en la amplitud instantánea, que siempre están asociados a grandes cambios litológicos o de acumulación de hidrocarburos.
- Mostrar reflexiones con alta amplitud, conocidos como puntos brillantes (bright

spots), éstos indican posibles acumulaciones de gas.

- Exponer lo cambios bruscos en la amplitud instantánea, los cuales están asociados a fallas o rasgos depositacionales, como canales.
- Detectar límites de secuencias.
- Manifestar la correlación espacial de la porosidad y otras variaciones litológicas.
- Detectar y calibrar efectos de entonamiento de capas delgadas, que pueden resultar de la interferencia constructiva o destructiva de las ondículas reflectoras.
- Distinguir un reflector masivo, por ejemplo una discordancia, de un grupo compuesto de reflectores.

Fase instantánea

La fase instantánea se define como la fase de la traza compleja; describe el ángulo entre la traza y la transformada de Hilbert de la traza para un tiempo dado. Es una medida de la continuidad de los eventos en una sección sísmica, ya que es independiente de la amplitud instantánea[6]. Los principales usos de la fase instantánea son:

- Mejorar el indicador de continuidad lateral.
- Detallar la continuidad de eventos, haciendo más visibles los eventos débiles. Esto se debe a que la fase es independiente de la amplitud instantánea.
- Detectar y calibrar efectos de entonamiento de capas delgadas.

- Mostrar rasgos depositacionales, tales como acuñamientos (pinchouts), discordancias angulares, canales, abanicos, geometría depositacional interna, zonas de engrosamiento y adelgazamiento, offlap, onlap, límites de secuencia, difracciones y la interferencia de eventos con diferentes características de buzamiento.

Frecuencia instantánea

La frecuencia instantánea, al igual que la fase, es un valor asociado a un instante de tiempo. Representa la tasa de cambio de la fase instantánea como una función del tiempo. Es una medida de la pendiente de la fase de la traza y se obtiene de la derivada de la fase[6]. La mayoría de los eventos están compuestos de reflexiones individuales de varios reflectores cercanos entre sí, con contraste de impedancia acústica y separación constante. La superposición de reflexiones individuales puede producir un patrón de frecuencias que caracterizan al evento completo. La frecuencia de un evento compuesto por un número de reflexiones cambiará gradualmente a medida que la secuencia de capas cambia en grosor o litología. Los principales usos de la frecuencia instantánea son:

- Detectar las anomalías de bajas frecuencias, debido a que éstas indican la presencia de hidrocarburos. Este efecto es acentuado por arenas no consolidadas, debido al contenido de petróleo en los poros. Ésta disminución en la frecuencia sólo ocurre en reflectores por encima de la zona productora; los reflectores profundos aparecen normales.

- Servir de indicador de zonas de fractura, ya que las mismas aparecen como zonas de frecuencia baja.

- Mostrar y calibrar efectos de entonamiento de capas delgadas.

- Servir como indicador de espesor de capa. Las altas frecuencias indican interfaces bruscas o capas delgadas de lutita. Las frecuencias bajas son indicadores de capas más masivas, como las ricas en arena.

- Revelar cambios abruptos, que de otra manera no se notaría, ya que representa el valor en un punto, en vez del promedio en un intervalo. Tales cambios pueden indicar acuñamientos o bordes del contacto agua-petróleo.

Polaridad aparente

La polaridad aparente es una ondícula con fase cero y se construye asignando un signo positivo cuando el coeficiente de reflexión es positivo o un signo negativo cuando el coeficiente de reflexión es negativo. La aplicación de la polaridad aparente está relacionada principalmente con la identificación de acumulaciones de gas y cambios estratigráficos[6].

Los atributos explicados hasta ahora son los más usados en los proyectos de caracterización de yacimientos. Dichos atributos conforman los elementos fundamentales para la generación de la inmensa diversidad de atributos sísmicos existentes en las diferentes plataformas de ambientes integrados. En general, la respuesta de cada uno de los atributos sísmicos está asociada a cambios en la litología y en las propiedades físicas del subsuelo.

A.3. Sistema Petrolero

El modelo de cuencas y sistemas petroleros permite a los geofísicos reconocer los procesos dinámicos de las cuencas sedimentarias y sus fluidos asociados, con el fin de establecer si las condiciones pasadas resultaron apropiadas para que los hidrocarburos rellenaran yacimientos potenciales y fueran preservados en dichos yacimientos[1].

Una forma efectiva de reducir el riesgo de inversión en la exploración de hidrocarburos consiste en determinar la presencia, tipos y volúmenes de estos en una prospeccion sísmica antes de iniciar las operaciones de perforación. La interpretación sísmica permite delimitar las estructuras cerradas e identificar trampas subterráneas potenciales pero no pronostica en forma confiable el contenido de las trampas. El hecho de perforar en una estructura cerrada, incluso cerca de un campo productivo de petróleo y gas, no garantiza el hallazgo de fluidos similares. Para ser redituable, la actividad exploratoria requiere una metodología que permita pronosticar la probabilidad de éxito de los datos disponibles y las incertidumbres asociadas. Dicha metodología se ha desarrollado por más de 50 años y relaciona las cuencas y sus elementos (los sedimentos y fluidos que las rellenan, además de los procesos dinámicos que actúan sobre dichos elementos), con los descubrimientos de hidrocarburos.

Un sistema petrolero (Fig. A.1) comprende una capa de roca generadora activa y, el petróleo y gas obtenidos de dicha roca mediante correlación geoquímica. El concepto comprende todos los elementos y procesos geológicos necesarios para que el petróleo y el gas se acumulen. Los elementos esenciales son una roca generadora efectiva, el yacimiento y roca de almacenamiento, el sello y los estratos de sobre-

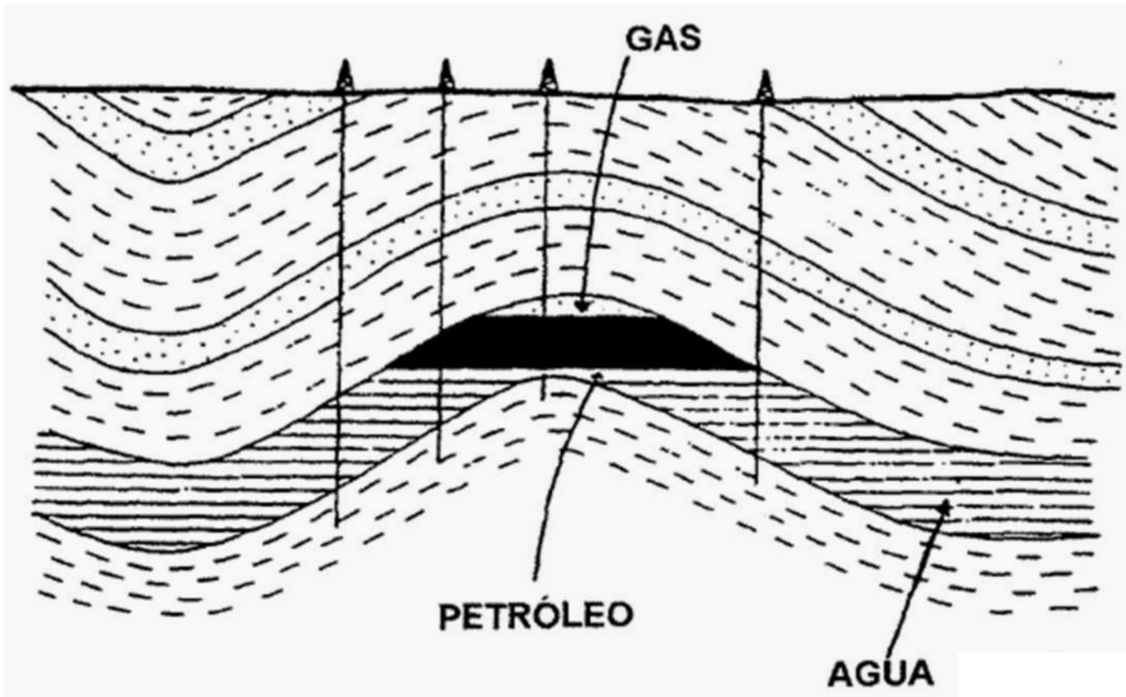


Figura A.1: Sistema petrolero.

carga. Los procesos incluyen la formación de trampas, la generación, migración y acumulación de los hidrocarburos y la preservación de los mismos. Estos elementos y procesos deben tener lugar en el orden adecuado para que la materia orgánica que se encuentra en una roca generadora se convierta en petróleo y luego sea almacenada y preservada. Si un sólo elemento o proceso falta o se produce fuera de la secuencia, el área prospectiva pierde viabilidad.

A.3.1. Elementos

1. **Roca madre o roca generadora**: es una roca rica en contenido de materia orgánica que, si recibe calor en grado suficiente generará petróleo o gas. Las rocas generadoras típicas, normalmente lutitas o calizas, contienen aproxima-

damente un 1 % de materia orgánica y al menos 0.5 % de carbono orgánico total (COT), si bien una roca generadora rica podría contener hasta 10 % de materia orgánica. Las rocas de origen marino tienden a ser potencialmente petrolíferas, en tanto que las rocas generadoras terrestres (tales como el carbón) tienden a ser potencialmente gasíferas. La preservación de la materia orgánica sin degradación es crucial para la formación de una buena roca generadora y resulta necesaria para que exista un sistema petrolero completo. En las condiciones adecuadas, las rocas generadoras también pueden ser rocas de yacimientos, como sucede en el caso de los yacimientos de gas de lutita.

2. **Roca de almacenamiento o rocas de reservorios**: debe poseer excelentes condiciones de porosidad y permeabilidad para permitir que el petróleo fluya libremente a través de ella. Las mejores rocas de reservorios son las calizas fracturadas y las areniscas.

3. **Roca selladora**: es una roca impermeable que evita que el petróleo siga desplazándose o se escape.

4. **Estratos de sobrecarga**: representa la pila sedimentaria que está sobre el yacimiento y que al paso del tiempo da las condiciones necesarias de presión y temperatura para que el sistema petrolero se lleve a cabo.

A.3.2. Procesos

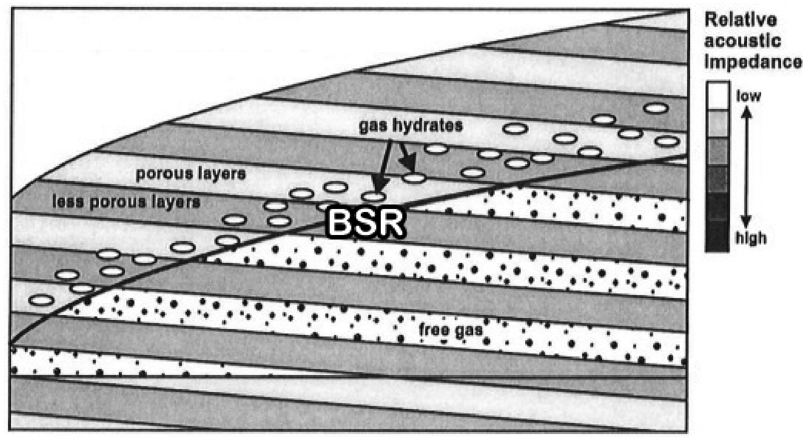
1. **Formación de la trampa**: incluye todos los procesos tectónicos que dan origen a las estructuras geológicas, además de los cambios litológicos laterales en las capas.

2. **Generación, migración y acumulación**: es el movimiento del hidrocarburo generado en la roca madre a rocas más porosas y permeables. La acumulación de los hidrocarburos ocurre al final del proceso de migración cuando existen elementos favorables para el entrampamiento y su cierre, como son la existencia de: la roca de almacenamiento, la roca selladora y la trampa.

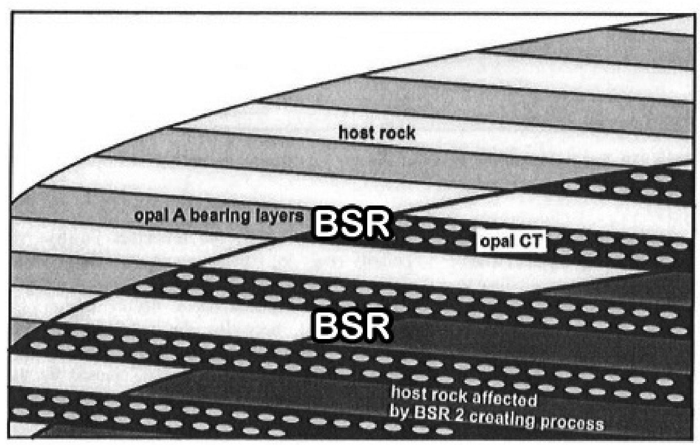
3. **Preservación**: es el tiempo que determina la conservación del hidrocarburo dentro del sistema petrolero, ésta se llevará a cabo hasta que ocurra algún fenómeno geológico que altere la composición del sistema.

A.4. BSR

El reflector simulador de fondo marino (por sus siglas en inglés BSR), se utiliza comúnmente como un marcador geofísico para la interpretación de la presencia de hidratos de gas o la diagénesis de ópalo. Entre el reflector del fondo marino (por sus siglas en inglés SBR) y la parte superior del basamento, el BSR aparece como el reflector más fuerte en los registros sísmicos, por lo general imita al SBR y corta a través de otros reflectores litológicos. El BSR se forma por procesos que dependen de la profundidad y el contraste de las velocidades entre las capas, que a su vez influyen en la presión y la temperatura en los sedimentos[26]. Berndt y colaboradores[7] clasifican a la formación del BSR en básicamente dos tipos: uno que es causado por la presencia de hidratos de gas, un esquema de este proceso se muestra en la Fig. A.2(a); y el otro que está relacionado con las etapas diagenéticas del proceso de ópalo A (amorfo) a Opal C (cristalino) a finalmente cuarzo, como se muestra en la Fig. A.2(b).



(a)



(b)

Figura A.2: Tipos de BSR[7]. (a) BSR relacionado a hidratos de gas. (b) BSR relacionado a diagénesis de ópalo.

Generalmente, la localización del BSR y otras interpretaciones de datos sísmicos se llevan a cabo a juicio y bajo criterios geológicos de intérpretes altamente entrenados[16]. Debido a los usos del BSR como marcador de la presencia de hidratos de gas, así como de la diagénesis de ópalo, es de gran importancia para los intérpretes contar con un sistema automatizado de reconocimiento de patrones para la deteccción del BSR. Una característica de los BSRs relacionados con los hidratos de gas es que son causados por el contraste de impedancia acústica negativa entre los sedimentos que contienen hidratos de gas y el gas libre por debajo de la zona de estabilidad, provocando que ese tipo de BSRs tengan polaridad negativa con respecto al SBR[31]. Un ejemplo se observa claramente la polaridad negativa del BSR con respecto al SBR se muestra en la Fig. A.3, que es un registro sísmico tomado de la Cuenca Farallón en el Golfo de California, donde se tiene un BSR formado por hidratos de gas, la curva continua señala al SBR y la curva discontinua marca al BSR.

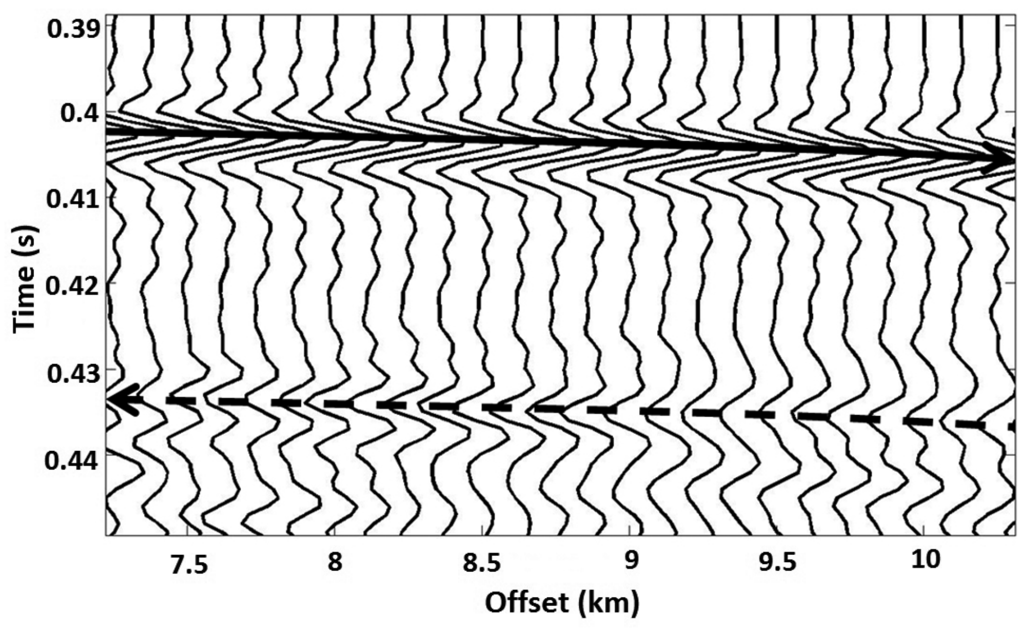


Figura A.3: Registro sísmico que presenta un BSR relacionado a hidratos de gas (curva discontinua). Aquí se observa que el BSR tiene una polaridad negativa con respecto al SBR (curva continua). Los datos fueron adquiridos en septiembre de 2006 en la Cuenca Farallón en el Golfo de California[31].